DOI: 10.32347/2412-9933.2020.41.68-82
УДК 519:5-512:8 +516:0

Минаева Юлия Ивановна
Кандидат технических наук, докторант кафедры основ информатики, orcid.org/0000-0002-1168-1927
Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев

Филимонова Оксана Юрьевна
Кандидат технических наук, доцент кафедры основ информатики, orcid.org/0000-0002-6394-0636
Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ПОДМНОЖЕСТВА УПОРЯДОЧЕННЫХ ПАР И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Аннотация. *Показана возможность формирования подмножество упорядоченных пар на основании тензоризации интервала универсального множества с последующей декомпозицией. В качестве одного из способов тензоризации и учета феномена нечеткости предложено использовать теплицеву матрицу, наиболее эффективно моделирующую нечеткость. Универсальное множество (УМ), на котором сформировано НМ, в тензорном формате содержит скрытую информацию, которая может быть использована при принятии решения не менее эффективно, чем эвристически назначенная ФП. Кроме того, наличие формально вычисленного ПмУП может служить убедительным сравнительным примером: располагая данным ПмУП, можно объективно отказаться от назначения эвристической ФП. Установлено, что ПмУП обладают существенно меньшей интервальной неопределенностью; приведены примеры, показывающие более высокую эффективность использования ПмУП по сравнению со стандартно сформированными НМ.*

Ключевые слова: принятие решений; условия неопределенности; нечеткое множество; функция принадлежности; тензор; сингулярная декомпозиция; теплицева матрица; подмножество упорядоченных пар

Введение

Теория нечетких множеств (ТНМ) в настоящее время является востребованным аппаратом решения задач (в частности, принятия решений) в условиях неопределенности. Математический аппарат ТНМ хорошо разработан, корректен. Основополагающими парадигмами ТНМ, по-нашему мнению, являются следующие:

– ТНМ моделирует психологический процесс принятия решения человеком в условиях неопределенности;

– функция принадлежности (ФП), формализующая этот процесс, представляет собой неявное знание.

В последнее десятилетие в науке и практике возник ряд задач и научных направлений, где применение ТНМ столкнулось с непредвиденными трудностями. В частности, использованное в ТНМ понятие ближайшего множества (четкого [1]) не коснулось определения ближайшего нечеткого множества (НМ) или любого другого [2], что снизило потенциальные возможности ТНМ [3; 4]. В экономической науке появилось новое научное направление, связанное с т. н. теорией перспектив, которое, однако, переросло экономику, т. к. декларированные и практически доказанные авторами – Д. Канеманом и А. Тверски [5; 6; 17] – положения оказались преобладающими для принятия решений в условиях неопределенности не только для экономической науки [7].

В работе [8] показано, что ТНМ, в которой НМ – основной (и единственный) объект теории, на самом деле один из видов многочисленных НЕ-факторов, нуждается в качественной модернизации изначальной методологии исследования. Целый ряд практических приложений ТНМ вскрыл определенные недостатки применения теории (точнее, ограниченную возможность решения многих классов задач). В работах [9; 10] показано, что не существует инверсий для нечетких чисел в операциях арифметического сложения и умножения соответственно. Недостаток инверсии становится значимым, когда пытаются использовать нечеткие числа в приложениях, например, анализируя сложные системы, мультиаспектные процессы принятия решений, допуски в сложной системе и др.

Прикладные специалисты практически универсально используют НМ в разных областях, если, по их мнению, там имеет место неопределенность, неточность или др. НЕ-фактор [11]. Парадигма ТНМ, утверждающая, что выбор ФП человеком (экспертом) на основе здравого смысла, опыта, всегда является рациональным, не выдерживает критики, т. к. в соответствии с исследованиями Нобелевских лауреатов Д. Канемана и Д. Тверски до 75% решений, принимаемых личностью, относятся к т. н. аномалиям рационального поведения. Отсутствие ответов на «элементарные» (с точки зрения сторонников ТНМ) вопросы привело к тому, что количество операций над НМ настолько выросло, что практически в каждой оригинальной работе есть попытки ввести новые операции, объясняя это спецификой задачи.

Вместе с тем, решение многих задач в условиях неопределенности с успехом реализуют методы и модели тензорных декомпозиций (ТД). В работе [12] показано, что применению ТД при моделировании объекта в условиях неопределенности в существенной мере способствовало то, что одна из отраслей науки – хемометрика, родившаяся на стыке химии и математики (а также по современным представлениям и физики) показала не только реально-значимые результаты в решении своих задач, но и возможность распространения разработанного математического аппарата на др. отрасли знаний.

Выяснилось, что одна из задач – извлечение наиболее существенной информации при анализе ограниченного объема доступных данных (неопределенность) – достаточно эффективно решается представителями хемометрики. Естественно желание использовать эти возможности в ТНМ, т. к. на сегодня – это наиболее распространенная методология решения задач в условиях неопределенности, несмотря на свои очевидные ограничения.

ТНМ декларировала универсальность своих моделей и всеобщность их применения, хотя существует целый ряд процессов, объектов, явлений, не поддающихся содержательному (формальному) представлению в виде НМ (в смысле Л. Заде) в силу сложности происходящих процессов или их неизученности. Другими словами, есть такие ситуации, где здравый смысл и опыт (экспертные оценки) просто бессильны. По мнению авторов данной работы, несомненные успехи ТНМ в большой степени обязаны тому, что в качестве рабочей модели применяется новая структура – подмножество упорядоченных пар с назначением одной из компонент смысла ФП. Выскажем предположение, что синтез ТНМ и ТД может открыть новые возможности в мягкой математике [13].

Как известно, одной из задач, решаемых интеллектуальными системами, является выделение скрытых знаний в составе исходного множества данных (ИМД), в т. ч. в составе УМ, на котором формируется НМ. Это предполагает, в отличие от произвольно назначаемой ФП, учет многофакторых данных без предварительного выделения т. н. существенных (субъективно назначенных) факторов. Обратим внимание, что ТНМ использует ИМД практически только для назначения универсального множества (УМ), на котором определяется НМ. ФП назначается экспертно (здравый смысл умноженный на опыт эксперта) с минимальным использованием состава ИМД или с полным игнорированием. Кроме того, возможности УМ для получения новых (скрытых) знаний практически не используются.

Анализ последних исследований

Недостаточность ФП с точки зрения представления неопределенности для целого ряда ситуаций была показана практически одновременно с созданием теории НМ. В работах [14; 15] предложены т. н. интуционистсткие НМ (IFS), определяемые на универсуме U: IFS над U – множество упорядоченных троек: элемент универсума, степень членства M, степень не-членства N, так что $M + N \leq 1$ и $M, N \in [0, 1]$. Когда $M + N = 1$ получаем НМ, и если $M + N < 1$ есть неопределенность [4], которая равна $I = 1 - M - N$. На основании упорядоченных троек IFS дополнительно предложены несколько обобщений НМ.

В то же время до сих пор не нашел отражения в научной литературе факт определенной избыточности ФП, состоящий в том, что в ряде случаев представление нечеткого утверждения (например, типа близко к…, примерно равно… и др.) в виде НМ не зависит от вида ФП. В соответствии с принятыми в ТНМ принципами выполнения арифметико-логических операций, формулируемое утверждение может моделироваться НМ с любой ФП из стандартных библиотек (например, МатЛаб), давая при этом одно и то же (или близкое) дефадзифицированное значение и практическую близость по норме. Это позволяет допустить существование некоторой обобщающей ФП. Обратим внимание на то, что метода или способа сравнительной проверки рациональности выбора ФП до сих пор не предложено.

Прежде чем перейти к изложению предлагаемой тензорной (альтернативной) методологии моделирования неопределенности без экспертного назначения ФП, но с использованием альтернативных подмножеств упорядоченных пар, где одна из комонент – весовая функция, обратим внимание на основные принципы, положенные Д. Заде в основу созданной им ТНМ, используя работу [16]. В этой работе отмечены оригинальные идеи и модели, введенные Л. Заде, в частности, понятие лингвистической переменной и ее применение к принятию приближенных решений, роль нечеткой логики в управлении неопределенностью, вычисления со словами.

Эти идеи не только сформировали новые подходы к анализу сложных, в частности, человеко-машинных систем, но и открыли принципиально новые возможности анализа и решения задач управления в условиях неопределенности, используя нотацию «рассуждений, похожих на рассуждения здравого смысла у человека». Обратим внимание на этот факт-признание, как самый важный и позитивный в ТНМ.

Психологи еще на заре своей деятельности пришли к пониманию того, что одна из самых замечательных человеческих способностей – выполнять решение широкого круга физических и психических задач, в т. ч. принятие решений, не прибегая к измерениям или вычислениям, связана именно со здравым смыслом (ЗС). В основе этой способности лежит важнейшее свойство человеческого мозга, связанное с манипулированием сенсорно-перцептивными образами: ощущениями расстояния, размера, веса, силы, цвета, сходства, истинности и других физических и психических характеристик. Основное отличие между перцептивными оценками и измерениями заключается прежде всего в том, что измерения являются четкими, тогда как оценки – нечеткими.

Вместе с тем, ни в одной из своих работ ни Л. Заде, ни огромная армия сторонников теории НМ не дали хотя бы рабочее определение здравому смыслу, на который возложены такие колоссальные надежды. Попутно укажем, что нобелевские лауреаты Д. Канеман и А. Тверски [17] не возлагают на ЗС радужных надежд и анализируют его достаточно критически. На наш взгляд, наиболее компетентную трактовку данного термина дает Merriam Webster, согласно которому ЗС подразумевает «… разумное суждение, основанное на обычном восприятии ситуации или фактов» [18]. Это определение предполагает, что ЗС зависит от того, насколько просто оценивается ситуация (не усложняя ее), обращаясь к опыту и общей осведомленности о ситуации (здравое и разумное суждение), уверенность в себе, применимости полученного опыт в будущих ситуациях.

В работе [19] ЗС назван практическим интеллектом и определяется как «умственная способность справляться с проблемами и возможностями жизни». Но главное состоит в том, что здравый смысл зависит от ситуации и обстоятельств, конкретно ЗС в одном из аспектов жизни может проявлять себя безупречно, а в другом – отсутствовать. Цели ЗС – это в основе своей мысли, которые позволяют уберечь личность от нерациональных ошибок или решений, и дает возможность увидеть картину в целом, а не ее часть.

Обратимся снова к Д. Канеману и А. Тверски, показавших, что способность человека принимать рациональные решения, основываясь на здравом смысле, не превышает 15÷20%, в остальных случаях – принимаемые решения относятся к т. н. аномалиям рационального поведения и зависят от целого ряда факторов. Другими словами, ФП, принятые на основе ЗС, по определению не могут быть на все 100% рациональными. Укажем, что в соответствии с [17; 30] ЗС в ряде задач принятия решений в условиях неопределенности продиктован математической статистикой и его можно сформулировать в форме утверждения «…ближе к центру». В работах [20; 21] понятие «здравый смысл» рассмотрено фундаментально.

Сделаем одно замечание. В математике и логике существуют т. н. правдоподобные выводы и рассуждения. Как правило правдоподобные выводы и рассуждения основаны на здравом смысле. В работе [22] приводятся примеры, когда правдоподобные выводы или рассуждения являются математически некорректными, в то же время корректные математически выводы (рассуждения) часто представляются неправдоподобными, не имеющими ничего общего со здравым смыслом. Обратим внимние, что интуиция ученого, весьма отдаленно связанная со ЗС, играет решающую роль в принятии рационального решения.

Заканчивая анализ состояния проблемы, обратимся к работе [23], в которой приводится видение будущего ТНМ как науки. Каноническая версия ТНМ, предложенная в 1965 г. Л. Заде, опирается на понятие функции принадлежности, которое представляет собой прямое обобщение двузначной характеристической функции. Таким образом, она использует весьма сильные логические допущения о природе принадлежности. Главными из них являются: а) принцип бивалентности; б) принцип различимости; в) принцип взаимной компенсации принадлежности и непринадлежности. Согласно принципу бивалентности любой элемент либо принадлежит, либо не принадлежит множеству (третье исключено).

Область значений принадлежности НМ вовсе необязательно должна быть интервалом [0,1] и вообще интервалом чисел. Это может быть некоторая структура, например, цепь, решетка L, решеточно упорядоченный моноид. Тем не менее, большинство известных расширений нечетких множеств, например L-нечеткие множества, которые представляют собой функции вида $A: X \rightarrow L$, также опираются на принципы бивалентности, однозначности и взаимной компенсации, указанные выше [24]. Во многих реальных ситуациях наряду с нечеткостью требуется учитывать другие возможные НЕ-факторы [30]: неточность, неопределенность, недоопределенность, противоречивость и др. Это означает необходимость перехода к новым базовым семантикам принадлежности. Наконец, для расширения областей значений функций принадлежности могут использоваться произведения решеток.

Новый виток развития ТНМ обусловлен введением нетрадиционных и гибридных нечетких множеств. К числу нетрадиционных относятся векторнозначные, интервальнозначные, нечеткозначные, гетерогенные, двухосновные нечеткие множества. Примером двухосновных нечетких множеств являются интуиционистские нечеткие множества [3], описываемые парами функций принадлежности μ и непринадлежности ν соответственно, $\hat{A} = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x))\}$, где $\mu_A: X \to [0,1]$, $\nu_A: X \to [0,1]$. Таким образом, здесь допускаются пресыщенные оценки «принадлежности – непринадлежности», причем $\mu_A(x)+\nu_A(x) \le 1$.

Другим показательным примером служат обобщенные нечеткие оценки на полярных шкалах $\hat{A} = \{(x, \mu_{A+}(x), \mu_{A-}(x)\}$. В работе [24] с целью развития единого подхода к построению нетрадиционных и гибридных нечетких множеств предлагается понятие BL-нечеткого множества, которое выражается функцией $A: X \to BL$.

Основной информационной гранулой в ТНМ является НМ. Получаемая информация, естественно, зависит от цели решаемой задачи, но она может быть только в форме НМ, в частности в 95% случаев с табулированной (!) ФП. ИМД содержит данные, в большинстве случаев зашумленные, скрывающие нужную информацию, отсутствие информации в ИМД, а в частности, пропуски данных с точки зрения ТНМ не может быть в принципе. Обратим внимание, что НМ может представляться в виде, аналогичном блочному, в частности, ФП может быть другим НМ, ФП которого может быть также НМ и т. д. Например, рассматриваемое в работе [25] НМ, использует стандартную (вертикальную) ФП и горизонтальную ФП. Таким образом НМ представляется трехмерным объектом, но, по мнению авторов, даже в этом случае НМ может обрабатываться на уровне одномерной ФП.

Один из наиболее важных результатов хемометрики состоит в том, что использование многомерного подхода к моделированию неопределенности при планировании экспериментов и анализе их результатов позволяет достичь существенного сокращения неопределенности за счет увеличения количества переменных в единственном измерении (эксперименте). Весьма актуальным и значительным является проверка свойств эвристически сформированного НМ в предположении его многомерности.

Приводимые в работе авторами примеры показывают, что существует определенный диссонанс между семантикой НМ с ФП, назначенной на основе эвристик, и ПмУП, сформированным на основе многомерного (тензорного) подхода к неопределенности. В общем случае именно подмножество упорядоченных пар, в т. ч. не обладающее семантикой НМ, является объективной моделью неопределенности, не уступающей НМ.

В работе [26] предпринята попытка дать философскую трактовку теории НЕ-факторов, в которой нечеткость – один из неограниченного множества НЕ-факторов. В этом плане показательной является работа [27], в которой рассмотрена современная философская трактовка энтропии как меры беспорядка / сложности. Интерес к работе [27] в контексте данной работы обусловлен прежде всего тем, что энтропия в ТНМ также выступает как мера неопределенности. Кроме того, введение ФП как результата неявного знания, позволяет провести аналогии со многими выводами, сформулированными в [27].

Автор [27] отмечает, что беспорядок / сложность (обуславливающие в нашей трактовке неопределенность) – это в терминах теории измерений – латентная переменная, т. е. она непосредственно ненаблюдаема, представляя собой не более, чем представление субъекта измерения об измеряемом свойстве (назначение ФП). Непосредственно наблюдаемы (измеряемы) индикаторы, значения которых связывают со значениями латент, специальные конструкции – метрические модели, общепринятой теории которых до сих пор не существует. Обратим внимание, что для НМ такими индикаторами являются дефадзифицированные значения $\tilde{x}$ и норма НМ, представленного как матрица n×2,

$$\overset{\square}{x} \square \left(x\mu^{x}\right)_{1}^{n}.$$

В ТНМ неявное знание было использовано при постулировании факта, что раскрытие неопределенности не только возможно, но и рационально при помощи эвристически назначенной ФП. Однако здравый смысл и возможность человека решать задачи в условиях неопределенности, не прибегая к сложным формальным моделям, относится к области неявных знаний и все, что было сказано об энтропии, целиком может быть перенесено на неопределенность и связанную с ней ТНМ и ее главный индикатор – ФП.

Постановка задачи

Рассмотрим несколько неформальных определений. Психологическая природа человека, лежащая в основе здравого смысла, многогранна и сложна [28]. Точно также сложна и многогранна природа неопределенности, НМ – один из наиболее популярных способов ее представления, применяемый практически без ограничений. Известно [12; 33], что для моделирования сложных явлений наиболее подходит тензор (что убедительно показали психометрия, хемометрика и особенно Г. Крон), поэтому, не посягая ни в коей мере на сложившееся мнение о ТНМ как одном из мощнейших средств решения задач в условиях неопределенности, следует безусловно рассмотреть альтернативные модели неопределенности, в частности на основе тензорных моделей.

По мнению авторов данной работы такой математический объект, как тензор, не только наиболее подходит для моделирования феномена неопределенности, но и создает дополнительные возможности решения новых классов задач. Обратим внимание, что моделирование феномена нечеткости (смазывания или размывания) изображений эффективно выполняется теплицевой матрицей.

Семантика понятия «тензор», которым обычно пользуются, например, в психометрии, такова: тензором описывается некоторое свойство объекта (или сам объект), обычно настолько сложное, что требуется несколько характеристик. Неопределенность – сложное состояние объекта, представлять такое состояние только одним объектом – НМ, идентифицируемым по ФП, по-видимому, не всегда возможно.

Рассматривая неопределенность в предположении, что она задана в виде массива значений (например, НЕ-фактор «неточность»), можно при условии целостности в следующем виде: объект (массив данных), на основании которого сформирована модель, неопределенности, например, НМ, должен быть восстановлен путем использования логико-математических операций над компонентами.

Обратимся снова к НМ: в паре

$$\tilde{x} = \{\, x_k \,/\, m^k \,\},$$

$$x \in X,\ k = 1,2,\ldots,K;\ \ \mu^k \to [0,1]$$

действительное значение x_k с учетом его значимости равно $x_k \cdot \mu^k$. Следовательно, минимальное множество действительных значений, используемое при анализе неопределенности, на основании которого сформулировано данное утверждение, можно представить в виде $\{x_k \circ \mu^k\}$, где – символ внешнего произведения, или $x_k \otimes (\mu^k)^{\mathrm{T}}$, где $\otimes$ – символ Кронекерова (тензорного) произведения (КП). Обратим внимание на следующее. Если считать объект $\tilde{x} = \{\, x_k / m^k \,\},\ k = 1,2,\ \ldots,K;\ \mu^k \to [0,1]$, назначенным на основе эвристик, рациональным, то объекты $x_k \cdot \mu^k$ или $x_k \otimes (\mu^k)^{\mathrm{T}}$ таковыми в нотации ТНМ считаться не могут, но эти объекты являются носителями информации, сознательное игнорирование их существования недопустимо.

Проведенный анализ современного состояния ТНМ позволил установить целесообразность исследования следующих проблем:

– выявление скрытых свойств (соответственно знаний) при представлении стандартного НМ $\tilde{x} = \{x_k \,/\, \mu_k^x\}$, $\mu_k^x \in [0,1]$, x∈ X в виде 2D-тензора при помощи $\text{КП} \to \breve{A} = \left(x \otimes \left(\mu^x\right)^T \right)$ с последующей тензорной декомпозицией (процедура SVD): исследование разложения

$$\aleph \approx \sum_{i=1}^{r} \sigma_i (\mathbf{x}_{\mathrm{i}} \otimes {}^{\pi}\boldsymbol{\mu}_i^x),$$

где $\mathbf{x}_{\mathrm{i}}$ – вектор, компоненты которого принадлежат УМ; ${}^{\pi}\boldsymbol{\mu}_i^x$ – вектор – аналог ФП, $(\forall j)\ (\forall j)\, {}^{\pi}\boldsymbol{\mu}_i^x \to [0,1]$, но не являющийся ФП, т. к. в составе пары $[\mathbf{x}_i^j\ {}^{\pi}\boldsymbol{\mu}_i^{x_j}]$ не отображает значимость j-й компоненты (в смысле НМ);

– подмножество упорядоченных пар ${}^{\pi}\tilde{\mathrm{x}} = \left(\mathbf{x}_1\ {}^{\pi}\boldsymbol{\mu}_1^x \right)$ может быть получено, если тензорная декомпозиции применяется к специальным матрицам (например, Теплица, Ханкеля или их комбинациям), моделирующим неопределенность, если они сформированы на основании вектора (интервала) УМ; необходимо изучить возможность использования формально сконструированных подобных ПмУП в качестве альтернативных НМ; качество сформированного ПмУП ${}^{\pi}\tilde{\mathrm{x}}$ сравнивается с НМ $\tilde{\mathrm{x}}$ с эвристически назначенной ФП на основании критериев – близость норм и дефадзифицированных значений: т. е.

$$\left\| {}^{\pi}\tilde{\mathrm{x}} \right\|_F \cong \left\| \tilde{\mathrm{x}} \right\|_F,\ \ \mathrm{def}({}^{\pi}\tilde{\mathrm{x}}) \approx \mathrm{def}(\tilde{\mathrm{x}}),$$

где def( ) – процедура дефадзификации НМ.

Изложение основного материала

Основные определения, математический аппарат

Сформулированы требования, которым должен удовлетворять математический апарат:

– быть общим подходом, который авторами в работе рассматривается в виде схемы: неопределенность (многомерный масив) $\rightarrow$тензор $\rightarrow$ {совокупность ПмУП} $\rightarrow$ применение аппарата ТНМ к векторам – результату тензорной декомпозиции (rank-1 тензор);

– {совокупность ПмУП} должна асимптотически приближаться к исходному объекту – модели неопределенности.

Тензорные декомпозиции отличаются тем, что они допускают различную интерпретацию. В данной работе рассмотрены наиболее актуальные декомпозиции, которые позволяют представить массив значений в виде совокупности векторов, что можно трактовать как ПмУП и применять аппарат ТНМ [29]. Во всех декомпозициях цель – разложение на составные части или аппроксимация, когда точной декомпозиции тензора с точки зрения внешних произведений множества векторов не существует. Векторы в этих декомпозициях использованы как основание для нового представления исследуемого объекта. Обратим внимание, что здесь проблема точности не должна возникать, т к. рассматривается объект в условиях неопределенности, а во-вторых, математический аппарат должен позволять значительно уменьшить вычислительные требования (особенно это касается памяти).

Рассмотрим основной понятийный аппарат, введя необходимые комментарии, диктуемые спецификой задачи. Напомним основные определения ТНМ.

Нечеткое множество – это четкий универсум, на котором задана четкая характеристическая функция (ФП), принимающая значения на отрезке [0, 1] (а не только на двухэлементном множестве {0, 1}, что имеет место в случае четкого множества). Универсум – это четкое множество, на котором определено нечеткое. В общем случае НМ – это объект, предназначенный для моделирования другого объекта, информация о котором есть неполной, неточной, неоднозначной, противоречивой, некорректной или др., но в общем случае может быть представлена в виде массива (многомерного) или одномерного в большинстве реальных случаев. Отметим, что данное определение близко к определению тензора.

Важно рассмотреть вопрос, как задается универсум. Его можно задать только указав некоторое множество возможных значений объекта, например, статистические, спектральные, фрактальные или другие характеристики объекта. В определении УМ для НМ не учтено, что множество значений универсума может обладать скрытой информацией.

Функция принадлежности (ФП – характеристическая функция) нечеткого множества $\tilde{A}$ – это четкая функция

$$\alpha = \mu_A(\mathrm{x}), \mathrm{U} \rightarrow [0,1],\ \mathrm{x} \rightarrow \mathrm{a},$$

отображающая каждый элемент четкого универсума U на четкое множество – отрезок [0,1], в соответствии с множеством $\tilde{A}$.

Множество принадлежностей ФП — это отрезок [0, 1] (а не двухэлементное множество {0, 1}, как в случае четких множеств). Другими словами, НМ $\tilde{A}$ – то подмножество упорядоченных пар $\langle \mathrm{U}, \mu_A \rangle$, где U — универсум, μ_A — ФП, т. е. это подмножество декартового произведения универсума U и отрезка [0, 1]:

$$\tilde{A} \subset U \times [0,1].$$

Учитывая, что НМ – это четкая (как правило) ФП, то проще всего НМ $\tilde{A}$ определить, указав его ФП μ_A и универсум U. При этом те элементы универсума, для которых ФП $\mu_A = 0$, НМ не принадлежат. НМ присутствует только там, где его ФП $\mu_A > 0$. Значение ФП определяет эвристическую (основанную на экспертном мнении) степень нечеткости элемента НМ.

Фадзификация (введение нечеткости) – процесс построения НМ на основе исходного множества данных (измеренных или полученных каким либо другим способом в т. ч. и виртуально). Известно, что любая реальность принимается как совокупность отдельных объектов и отношений между ними. В простейшем случае объекты сформированы в виде массива, который можно представить в виде матрицы или «вытянув» эту матрицу по столбцам (процедура векторизации) в один ряд (вектор). Количественные характеристики общего признака, которым обладает ИМД, ложатся в основу формирования НМ, часто для этой цели используются статистические характеристики ИМД.

Если представить НМ в виде 2D-тензора (матрицы) размерностью n×2, например,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_1 & \mu_1^A \\ & \ddots \\ a_n & \mu_n^A \end{pmatrix} \text{ и } \tilde{B} = \begin{pmatrix} b_1 & \mu_1^B \\ & \ddots \\ b_n & \mu_n^B \end{pmatrix},$$

то арифметическую операцию $*_f \in \{+, -, \times, /\}$, $\tilde{C} = \tilde{A} *_f \tilde{B}$ в нотации MatLab можно представить в виде: $\tilde{C} = \tilde{A} *_f \tilde{B}$; $\tilde{C} = \left(\tilde{A}(:,1) *_f \tilde{B}(:,1), \min(\tilde{A}(:,2), \tilde{B}(:,2)) \right)$ (принцип нечеткого расширения).

Вводя понятие «тензор», следует учитывать, что оно имеет несколько определений: например, тензор – это объект, определяемый совокупностью коэффициентов $a_{ijk..m}$ полилинейной формы φ=φ (x,y,z,…,w), записанной в некотором ортонормированном базисе [31]. В частности, совокупность коэффициентов a_{ij} билинейной формы φ=φ (x,y), образующая матрицу $A=[a_{ij}]$, представляет собой тензор. В данной работе тензор рассматривается как d-линейная форма или d-мерный массив $A\ [a_{i1i2\ldots id}]$, который имеет:

– размерность (порядок) d = число индексов (измерений, мод, осей, направлений, путей);

– размер $n_1 \times \cdots \times n_d$ (число отсчетов по каждой оси); d-тензоры можно записывать с помощью скелетных разложений обычных матриц.

Весьма важным является то, что при сохранении общего количества элементов тензора эффективность его представления, использования или другого назначения можно существенно повысить за счет увеличения числа измерений и уменьшения числа отсчетов по каждому измерению. “Экстремальный” случай – превращение вектора (интервала) размера $N = 2^d$ в d-тензор размеров $2\times 2\times \cdots \times 2$.

Известно [32], что при наличии некоторого функционала неизвестный объект (или объект в условиях неопределенности) может быть проиндексирован f-индексами, причем f-индекс может быть введен либо естественным, либо искусственным образом. Это позволяет вектор длины 2^f преобразовывать в тензор $\underbrace{2\times 2\times 2\times \cdots \times 2}_{f}$, у которого будут малые ранги, даже если данный вектор состоит из значений одномерной функции, в частности, быть интервалом с подинтервалами. Одним из преимуществ концепции тензоров есть то, что их можно вводить искусственно, вводить виртуальные размерности в ИМД, где их фактически нет, получать в общем случае малоранговые разложения.

Классик тензрного анализа Г. Крон определяет тензор как объект, компонентами которого «… могут быть числа, функции, операторы и т.д. Единственным критерием тензора является его линейная форма преобразования относительно данной группы преобразований. … тензорный характер не зависит от природы его компонент или от данной ему физической или геометрической интерпретации» [33]. Тензор – многомерный массив, где порядок тензора обозначает размерность массива. Например, скаляр – просто порядка – 0 тензор, вектор порядка – 1, матрица порядка – 2, и любой тензор, порядок которого равен 3 или больше, представлен как тензор высшего порядка. В данной работе внимание сосредоточено на тензоре порядка ≤ 3. Декомпозиция тензоров 3-го порядка связана с т. н. модальными операциями и рассматривается авторами в другой работе. В данном случае в статье основное внимание сосредоточено на стандартном SVD.

Используя работу [34], рассмотрим сингулярную декомпозицию 2D-тензоров (матриц), обращая внимание на некоторые характеристики, недостаточно учитываемые в прикладных исследованиях. SVD: Пусть задана матрица $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ и число k = min (m,n). Тогда существуют ортонормальные матрицы

$$U=[u_1,u_2,\ldots,u_k] \in \mathbb{R}^{n\times k},$$

$$V=[v_1,v_2,\ldots,v_k] \in \mathbb{R}^{m\times k}$$

такие, что $X = U\sum V^T$, где Σ =diag(σ_1, σ_2,…, σ_k), $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_k$.

Выберем r ≤ k и разделение

$$\mathbf{X} = [\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2]\begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix}[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2]^T = \underbrace{\mathbf{u}_1 \Sigma_1}_{R} \underbrace{\mathbf{v}_1^T}_{S^T} + \mathbf{u}_2 \Sigma_2 \mathbf{v}_2^T.$$

С учетом введенных обозначений имеем:

$$\left\| \mathbf{X} - RS^T \right\|_F = \left\| \Sigma_2 \right\|_F = \sigma_{r+1}.$$

Низкоранговые аппроксимации эффективны, если сингулярные величины убывают (разрушаются) достаточно быстро.

Span(X)≈ Span(R), Span(X^T)≈ Span(S^T) (span – диапазон)

Ф-норма матрицы X:

$$\|X\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |x_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \left(\mathrm{trace}(X \cdot X^T) \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{\min(m.n)} \sigma_i^2(X) \right)^{1/2},$$

где trace(X) – след матрицы X, $\sigma_i^2(X)$ – сингулярные величины SVD-разложения матрицы X.

Приведем основные факты, касающиеся SVD, необходимые для понимания излагаемого материала, а также ряд определений. Основная их часть изложена в [34]:

– колонки $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n]$ и $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n]$ – это правый и левый сингулярный векторы, связанные соотношениями: $\mathbf{A}\mathbf{v}_j = \sigma_j \mathbf{u}_j, \mathbf{A}^T \mathbf{u}_j = \sigma_j \mathbf{v}_j, j = 1,n;$

– SVD матрицы A связано с собственно-значными декомпозициями $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ соотношениями: $\mathbf{V}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{A})\mathbf{V} = \mathrm{diag}(\sigma_1^2,\ldots,\sigma_n^2)$,

$$\mathbf{U}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)\mathbf{U} = \mathrm{diag}(\sigma_1^2,...,\sigma_n^2,\underbrace{0,...,0}_{m-n});$$

матрица $\sigma_1 u_1 v_1^T$ есть ближайшая к A rank-1 матрица, т. е. решение проблемы $\sigma_{min} = \min_{\mathrm{rank}(\mathbf{B})=1} \|\mathbf{A}\text{-}\mathbf{B}\|_F$;

– сумма квадратов элементов любого столбца матрицы V равна 1, представлена в табл. 1.

Определение. Пусть задано ПмУП $P=[\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\ \mathbf{y}^{\mathrm{T}}]$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, y \to [0,1], \mathrm{y} \in \mathbf{y};$ сформируем 2D-матрицу

$$T_{xy} = [\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}^{\mathrm{T}}],$$

где $\otimes$ – символ кронекерова произведения, и выполним сингулярную декомпозицию

$$T_{xy} \to [\mathrm{u\ s\ v}] = \mathrm{svd}(T_{xy}).$$

Объект, вычисленный в виде

Tab_pup_tx=([abs(u(:,1)*s(1,1))*max(abs(v(:,1))), abs(v(:,1))/max(abs(v(:,1)))]),

представляет собой подмножество упорядоченных пар (группоид[**]) и обладает свойством, что ПмУП P и Tab_pup_tx близки по Ф-норме и дефадзифицированному значению, вычисленному по методу ЦТ, т.е:

$$\|P\|_F \cong \|Tab\_pup\_tx\|_F, \mathrm{defuzz}(P) \cong \mathrm{defuzz}(Tab\_pup\_tx).$$

Пример

Рассматривается: НМ xy= [x' y'], где x=[3:6/8:9]; y = trimf(x, [3 6 9], НМ моделируют утверждение ⟨примерно 6⟩ (рис. 1).

1. Вычислим Ф-норму, дефадзифицированное значение НМ xy, имеем:

n_xy=norm(xy,'fro'),

s_xy=sum(xy(:,1).*xy(:,2))/sum(xy(:,2)),

соответственно; n_xy = 18.99, s_xy = 6.0;

2. Выполним сингулярную декомпозицию tx, рассмотрев 2 случая:

а) [u s v]=svd(tx');

б) [u s v]=svd(tx), здесь ′ – символ транспонирования матрицы;

3. Сформируем объект – ПмУП Tab_pup_tx

Tab_pup_tx=([abs(u(:,1)*s(1,1))*max(abs(v(:,1))), abs(v(:,1))/max(abs(v(:,1)))]);

4. Вычислим Ф-норму объекта Tab_pup_tx – n_pmup=norm(Tab_pup_tx,'fro') =18.99;

5. Вычислим дефадзифицированные значение ПмУП из п.4

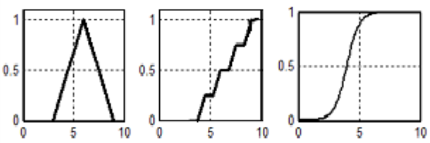
s_pup_tx=[sum(Tab_pup_tx(:,1).* Tab_pup_tx(:,2))/sum(Tab_pup_tx(:,2))] * k_{tr} = 6.02, где k_{tr} – нормировочный коэффициент, k_{tr}=1/[1.21÷1.23].

Вычисленные величины сведены в табл. 3.

Анализ примера показывает, что нечетко-множественная интерпретация сингулярной декомпозиции 2D-тензора, во-первых, корректна: в случае а) Ф-норма ПмУП и $\text{НМ}_{\mathrm{trimf}}$ и дефадзифицированные значения практически совпадают, т. е. объекты НМ со стандартной ФП и ПмУП – разложение тензорного произведения компонент НМ близки; во – вторых, случай б) – транспонирование матрицы не является рассчетным, т. к. ПмУП и $\text{НМ}_{\mathrm{trimf}}$ не являются близкими в смысле Ф-нормы, дефадзифицированные значения различны.

На рис. 1 представлено стандартное НМ с треугольной ФП, ближайшее (в смысле Ф-нормы ПмУП) и возможная аппроксимация ПмУП сигмоидной кривой.

Сформированное кронекерово произведение векторов (x,y): tx=kron(x,y') представлено в табл. 2. НМ моделируют утверждение ⟨примерно 6>, xy=[x' y'], где x=[3:6/8:9];y=trimf(x, [3 6 9], на рис. 1 *а*, *г* – $\text{НМ}_{\mathrm{trimf}}$ ⟨примерно 6⟩; *б, д* – ближайшее (в смысле Ф-нормы) ПмУП, вычисленное в результате сингулярной декомпозиции кронекерова (тензорного) произведения компонент $\text{НМ}_{\mathrm{trimf}}$; в – возможная (сигмоидная) аппроксимация ПмУП.



3.00	0	3.00	0
3.75	0.25	3.75	0
4.50	0.50	4.50	0.25
5.25	0.75	5.25	0.25
6.00	1.00	6.00	0.50
6.75	0.75	6.75	0.50
7.50	0.50	7.50	0.75
8.25	0.25	8.25	0.75
9.00	0	9.00	1.00

а б в г д

Рисунок 1 – НМ xy=[x' y'], где x=[3:6/8:9]; y=trimf(x, [3 6 9], НМ моделируют утверждение ⟨примерно 6⟩: а, г – $\text{НМ}_{\mathrm{trimf}}$ ⟨примерно 6⟩; б ,д – ближайшее (в смысле Ф-нормы) ПмУП, вычисленное в результате сингулярной декомпозиции кронекерова (тензорного) произведения компонент $\text{НМ}_{\mathrm{trimf}}$, в – возможная (сигмоидная) аппроксимация ПмУП

Таблица 1 – ***SVD характеристики***

[U S V] = svd (X)															
X =					U =					diag(S) =	V =				
3.52	0.99	2.29	4.68	2.76	-0.44	-0.04	0.29	-0.84	0.15	15.47	-0.57	0.76	-0.03	0.14	-0.26
0.88	2.84	0.79	2.57	5.24	-0.34	-0.60	-0.71	-0.06	-0.11	4.94	-0.19	0.04	-0.78	-0.45	0.40
5.70	2.08	0.86	1.03	0.91	-0.32	0.73	-0.39	-0.09	-0.45	3.55	-0.32	0.00	0.33	0.30	0.83
4.45	1.79	2.29	2.20	2.65	-0.40	0.27	-0.19	0.28	0.81	1.24	-0.52	-0.29	0.43	-0.67	-0.13
5.24	0.24	3.82	5.87	5.52	-0.66	-0.17	0.48	0.46	-0.31	0.65	-0.52	-0.58	-0.32	0.49	-0.25

[**]Напомним, что группоид – это упорядоченная пара, состоящая из множества E и внутреннего закона композиции *, определенного на этом множестве всюду, обозначаемая как (E, *).

*Таблиця 2 – **НМ моделирующее утверждение (примерно 6)***

Кронекерово произведение векторов (x, y): tx = kroon (x, y'), tx =								
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.75	0.94	1.13	1.31	1.50	1.69	1.88	2.06	2.25
1.50	1.88	2.25	2.63	3.00	3.38	3.75	4.13	4.50
2.25	2.81	3.38	3.94	4.50	5.06	5.63	6.19	6.75
3.00	3.75	4.50	5.25	6.00	6.75	7.50	8.25	9.00
2.25	2.81	3.38	3.94	4.50	5.06	5.63	6.19	6.75
1.50	1.88	2.25	2.63	3.00	3.38	3.75	4.13	4.50
0	0	0	0	0	0	0	0	0

*Таблиця 3 – **Результат выполнения примера***

Ф-нормы			**Дефадзифицированные значения**		
НМ	***Tab_pup_tx***		***НМ***	***Tab_pup_tx***	
18.99	а	б	6.00	а	Б
	18.99	15.07		6.02	4.94

Обратим внимание, что ПмУП представлено в виде аналогичном НМ, другими словами, операции нечеткой математики и логики могут выполняться абсолютно аналогично соответствующим операциям над НМ с сопоставимым результатом. Важным преимуществом ПмУП является его унифицированный вид.

Алгоритмы и методы решения основных задач

Главной целью является исследование возможности использования представленных результатов. В частности можно показать, что УМ в тензорном формате содержит скрытую информацию, которая может быть использована при принятии решения не менее эффективно, чем эвристически назначенная ФП. Кроме того, формально вычисленный ПмУП может быть использован убедительным для сравнительной оценки. Теплицевы матрицы (ТМ) впервые были применены в приложениях, связанных с обработкой сигналов и изображений [35] как способ моделирования феномена нечеткости в виде суммы кронекер-произведений с применением стандартных процедур SVD. Одно из применений декомпозиций – может быть использовано при сохранении изображений. Линейная дискретная модель сохранения изображения – это вектор-матричное уравнение:

$$g=Hf + \eta,$$

где g – наблюдаемое изображение; f – идеальное изображение; η – аддитивный шум; H – матрица, представляющая феномен смазывания (нечеткости изображения). В качестве матрицы H используют специальные (теплицевы, ганкелевы или др.) матрицы. Если УМ имеет вид $x = [1\ \ 2\ \ 3\ \ 4]$, то Т-матрица, построенная на векторе x, в нотации МатЛаб, будет такой: $toeplitz(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Если предположить, что 3-й элемент УМ является предпочтительным, то Т-матрица приобретает вид: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим пример, приводимый в работе [36], решение которого выполнено при помощи стандартных приемов ТНМ – т. е. формированием НМ с эвристически назначенной ФП, и покажем, что аналогичный результат можно было бы получить, использовав альтернативное ПмУП, полученное путем размывания вектора параметров при его погружении в специальную матрицу с последующей сингулярной декомпозицией. В этой работе, выполненной в рамках проекта «Формирование системы аналитических компетенций для инноваций в бизнесе и государственном управлении», реализовано оценивание денежного потока проекта, общепризнанными показателями которого, характеризующими инвестиционный проект, служат чистый дисконтированный доход NPV, внутренняя норма возврата IRR, срок окупаемости и др. При вычислении каждого из этих показателей по расчетным формулам денежный поток проекта предполагается известным. Однако на практике невозможно получить точную оценку потока проекта, т. к. она является размытой. Но рассчетные формулы не могут использовать размытость реальных величин, поэтому их пытаются формализовать. Экономисты применяют ТНМ, используя нечёткие числа, параметры которых могут быть оценены экспертами, и соответственно нечеткую математику.

При этом денежный поток проекта задаётся как набор трапециевидных нечётких чисел $C_t = \{c_{t_1}, c_{t_2}, c_{t_3}, c_{t_4}\}$, $t = 0,1,2,\ldots,\mathrm{T}$, параметрам $c_{t_i} \in C_t$ дается смысловая интерпретация. Например, $c_{t_1} \in C_t$ интерпретируется как наименьшее возможное значение потока в момент времени t (поток ни при каких обстоятельствах не может опускаться ниже этого значения), $c_{t_4} \in C_t$ – наибольшее возможное значение, а числа $[c_{t_2}, c_{t_3}] \in C_t$ образуют подинтервал, в пределах которого, скорее всего, будет находиться значение денежного потока. Если для оценки используют треугольные нечёткие числа

$$C_t = \{c_{t_1}, c_{t_2}, c_{t_3}, c_{t_4}\},$$

то c_{t_1} – пессимистическая; c_{t_4} – оптимистическая; c_{t_2} – наиболее вероятная оценка денежного потока проекта.

Аналогичным образом ставка дисконтирования и других характеристик также представляется в виде нечётких чисел.

Обратим внимание, что это далеко не полный набор утверждений-интерпретаций, которые может сформулировать опытный эксперт (может быть, например, утверждение о предпочтительности параметров $[c_{t_2}, c_{t_3}] \in C_t$ и др.). Не касаясь эффективности применения той или иной ФП в отдельном контексте, т.к. фактов влияния вида ФН на качество принятия решения в современной литературе не обнаружено, отметим два обстоятельства, которые позволяют полагать, что использование только эвристически назначенной ФП может привести к серьезным последствиям. Во-первых, не всегда может быть эксперт, оценка которого может считаться положительной, кроме того, возможны случаи рекомендаций нескольких ФП, если присутствуют несколько экспертов (хотя наличие противоречивых ФП не обнаружено); во-вторых, существует ряд ситуаций, когда назначить ФП невозможно, например, в случае больших данных.

Все это приводит к необходимости поиска дополнительных источников получения ФП, кроме экспертных оценок.

Желательно, чтобы эти методы давали гарантированный результат, не требовали привлечения аппарата теории вероятностей и могли быть использованы как базовые оценки для сравнения, полагая, что экспертное назначение ФП может, по крайней мере, не ухудшить результат.

С этой целью рационально использовать методы восстановления аудио- и видеосигналов на основании процедур деформации прототипов, рассмотренные в работе [37]. Дальнейшее развитие этих процедур – процедуры размывания путем погружения интервалов (универсальных множеств) в специальные матрицы (Теплица, Ганкеля или их комбинации). Учитывая ограниченный объем работы, представим лишь один фрагмент-представление объекта.

Рассмотрим два случая: *а* – использование стандартных трапециевидного и треугольного нечетких чисел; *б* – использование ПмУП, вычисленного на основании погружения интервала УМ в специальную матрицу.

Критерии для сравнения – Ф-норма и дефадзифицированное значение.

Этапы реализации алгоритма в нотации МатЛаб представлены ниже, результаты работы – в табл. 4, отображающей алгоритм:

1. Формирование стандартных НМ.
2. Формирование Т-матриц tc1 и tc2 с выбором параметров c_2 и c_3 в качестве главной диагонали с последующей сингулярной декомпозицей.
3. Вычисление ПмУП.
4. Формирование теплиц- и ханкель-матриц на векторе С без выбора элемента главной диагонали, сингулярная декомпозиция, вычисление ПмУП.

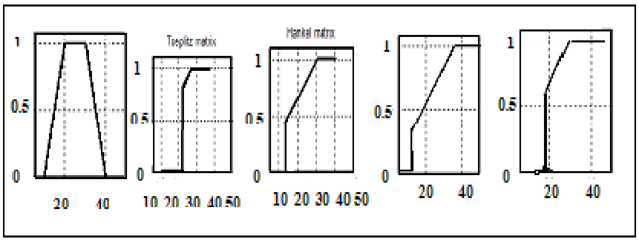
Результаты реализации данного алгоритма приведены в табл. 4.

Таблица 4 – ***Результаты реализации алгоритма сравнения – Ф-норма и дефадзифицированное значение***

<table>
<tr><td rowspan="3">1</td><td colspan="4">Случай использования трапециевидного числа fs1 =</td><td colspan="4">Случай использования треугольного числа fs1 =</td></tr>
<tr><td colspan="4">10.00 0
20.00 1.00
30.00 1.00
40.00 0</td><td colspan="4">10.00 0
20.00 1.00
30.00 0
40.00 0</td></tr>
<tr><td colspan="8">Ф-норма и дефадзифицированные значения</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">54.79 25.00</td><td colspan="4">54.78 20.00</td></tr>
<tr><td rowspan="6">2</td><td colspan="8">Тензорные (Теплиц) модели универсальних множеств размывания УМ путем их погружения в Т-матрицу с выбором приоритетных значений</td></tr>
<tr><td colspan="4">tc1=</td><td colspan="4">tc2=</td></tr>
<tr><td>20.00</td><td>10.00</td><td>0</td><td>0</td><td>30.00</td><td>20.00</td><td>10.00</td><td>0</td></tr>
<tr><td>30.00</td><td>20.00</td><td>10.00</td><td>0</td><td>40.00</td><td>30.00</td><td>20.00</td><td>10.00</td></tr>
<tr><td>40.00</td><td>30.00</td><td>20.00</td><td>10.00</td><td>0</td><td>40.00</td><td>30.00</td><td>20.00</td></tr>
<tr><td>0</td><td>40.00</td><td>30.00</td><td>20.00</td><td>0</td><td>0</td><td>40.00</td><td>30.00</td></tr>
<tr><td rowspan="5">3</td><td colspan="8">Результат сингулярной декомпозиции Т-матриц ПодмножЗества упорядоченных пар</td></tr>
<tr><td colspan="4">Tab_pup_x_1 =
11.99 0.33
23.15 0.65
29.76 0.83
35.81 1.00</td><td colspan="4">Tab_pup_x_2 =
17.99 0.61
20.74 0.70
28.91 0.97
29.68 1.00</td></tr>
<tr><td colspan="8">Ф-норма и дефадзифицированные значения</td></tr>
<tr><td colspan="4">53.38 28.28</td><td colspan="4">49.73 25.39</td></tr>
</table>

Окончание табл. 4

4	**Размывание интервала УМ путем погружения в специальную матрицу без выбора приоритетных значений**							
	Т-матрица toc 1=				**Г-матрица toc2 =**			
	10.00	20.00	30.00	40.00	10.00	20.00	30.00	40.00
	20.00	10.00	20.00	30.00	20.00	30.00	40.00	0
	30.00	20.00	10.00	20.00	30.00	40.00	0	0
	40.00	30.00	20.00	10.00	40.00	0	0	0
	Tab_pup_x_1 =				**Tab_pup_x_2 =**			
	22.31	0.82			13.32	0.44		
	22.31	0.82			25.09	0.82		
	27.21	1.00			26.83	0.88		
	27.21	1.00			30.44	1.00		
	Ф-норма и дефадзифицированные значения							
	49.79	25.00			49.56	25.64		



а б в г д

Рисунок 2 – Сравнительный вид стандартного НМ з трапециевидной ФП и альтернативные ПмУП: а – стандартное НМ; б – формирование теплиц-матрицы на основании вектора УМ; в – формирование ганкель-матрицы основании вектора УМ: г, д – формирование

На рис. 2 представлен сравнительный вид стандартного НМ з трапециевидной ФП и альтернативные ПмУП, сформированные на основе погружения УМ в специальную матрицу с целью размывания характеристики объекта: *а* – стандартное НМ; *б* – формирование теплиц-матрицы на основании вектора УМ; *в* – формирование ганкель-матрицы основании вектора УМ; *г, д* – формирование теплиц-матрицы на основании вектора УМ с выбором приоритетного значення: *г* – $c_2 \in C$, *д* – $c_3 \in C$.

Как видно из приведенных вычислений, альтернативные ПмУМ имеют существенно более узкий интервал неопределенности, вкладываемый в интервал неопределенности НМ, ФП которого выбрана на основе эвристических оценок эксперта.

Суммируя результаты полученных вычислений, можно сделать следующие промежуточные выводы:

1. Ф-нормы и дефадзифицированные значения всех рассмотренных моделей неопределенности (стандартное НМ, тензорные модели, построенные на интервале параметров) близки, что подтверждает эффективность экспертных оценок в данном конкретном случае.

2. Интервальный НЕ-фактор является в значительной мере универсальным параметром для представления неопределенности. Во всех случаях ПмУП, построенные на декомпозициях тензорных моделей интервалов (универсальных множеств), имеют общий стандартный вид, близкий к виду сигмоидальной функции интервала.

Приведем достоинства свойства рассматриваемого метода:

– все альтернативные ПмУП сформированы единообразно; критериальные параметры (Ф-норма и дефадзифицированное значение), по которым сравниваются НМ и ПмУП, во всех случаях или достаточно близки или практически совпадают;

– ПмУП, вычисленное на основании тензорной модели УМ, позволяет при использовании в задачах принятия решений получить результат, по крайней мере, адекватный тому, что дают методы ТНМ, другими словами, располагая данным ПмУП, можно объективно отказаться от назначения эвристической ФП, в частности при ограниченных возможностях ее назначения.

Выводы

1. Предложены альтернативные аналоги НМ – альтернативные подмножества упорядоченных пар

$$_{\pi}X = \left(x \quad _{\pi}\mu\right)_{i=1}^{n},$$

$$x \in X = \{x_1, \ldots, x_n\}, \quad _{\pi}\mu \to [0,1],$$

$$x \in X = \{x_1, \ldots, x_n\}, \quad _{\pi}\mu \to [0,1],$$

которые вычислены на основании сингулярных декомпозиций теплиц- и ханкель-матриц. Альтернатива НМ состоит в том, что компонента $_{\pi}\mu$ – аналог ФП во всех случаях является унифицированной.

2. Альтернативные ПмУП сформированы единообразно. Характеристики, на основании которых сравниваются НМ и АлПмУП (Ф-нормы и дефадзифицированные значения), в случаях применения трапециевидных, треугольных или гауссовых ФП достаточно близки или практически совпадают.

3. ПмУП обладают существенно меньшей интервальной неопределенностью, что повышает эффективность принятия решений.

Список литературы

1. *Zimmermann, H.-J. Fuzzy set theory and its applications. 4-th edn. Publisher, Kluwer Pub. – Boston. – 2001. – 475 с.*
2. *Hanss, M. Applied Fuzzy Arithmetic: An Introduction with Engineering Applications. [Електронный ресурс] / Hanss// Springer Science & Business Media. – 2001. – Режим доступа / – https://www.springer.com/gp/book/9783540242017#.*
3. *Валькман Ю.Р. Моделирование Н.Е. – факторов – основ интеллектуализации. / Ю.Р. Валькман, В.С. Быков, А.Ю. Рыхальский // Системні дослідження та інформаційні технологии. – 2007. – Т.1, С. 39 – 61.*
4. *Ashfaq M.S. A Tribute to Father of Fuzzy Set Theory and Fuzzy Logic. Dr. Lotfi A. Zadeh). [Електронный ресурс] / M.S. Ashfaq// International Journal of Swarm Intelligence and Evolutionary Computation. -2018. – Vol. 7(2), С.1-5. – Режим доступа – https://www.longdom.org/open-access/a-tribute-to-father-of-fuzzy-set-theory-and-fuzzy-logic-dr-lotfi-azadeh-2090-4908-1000170.pdf.*
5. *Narin'yani A.S. (2008). NE-faktory: netochnost' i nedoopredelennost' – razlichiye i vzai-mosvyaz' (do-formal'noye issledovaniye). [Електронный ресурс]. – Режим доступа-http://viperson.ru/articles/aleksandr-narinyani-nefaktory-netochnost-i-nedoopredelennost-razlichie-i-vzaimosvyaz.*
6. *Narin'yani A.S. (2004). Inzheneriya znaniy i NE-faktory: kratkiy obzor [Електронный ресурс]. – Режим доступа – http:// www. computer-museum.ru/frgnhist/ne-faktor.htm.*
7. *Black M. (1997). Vagueness: An exercise in logical analysis. Philosophy of Science 4: Reprinted in R. Keefe, P. Smith (eds.): Vagueness: A Reader, MIT Press, С. 427 – 455.*
8. *Zadeh L.A. Fuzzy Sets. [Електронный ресурс]. Journal of Information and control, 1965. – Vol. 8, – С. 338 – 353. – Режим доступа – https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001999586590241X.*
9. *Hisdal E. The Philosophical interpretation of the theory of fuzzy sets. [Електронный ресурс]. Journal of Fuzzy Sets and Systems, 1988. – Vol. 25. – С. 349 – 356. – Режим доступа – https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/016501148890019X*
10. *Seising R. Fuzzy Sets and Systems and Philosophy of Science. / R. Seising// Views on Fuzzy Sets and Systems from Different Perspectives. Studies in Fuzziness and Soft Computing – 2009. – Vol 243. – С.1 – 35. Springer Berlin, Heidelberg.*
11. *Вятченин Д.А. Проблема нечеткости как научного концепта: философско-методологический анализ: автореферат дис. на соискание науч. Степени кандидата философских наук 090008. Минск. Беларусь. 1998.*
12. *Вятченин Д.А. Нечеткая кластеризация и нечеткая математическая морфология в задачах обработки изображений / Д.А. Вятченин, А.В.Хижняк, А.В. Шевяков // Монография. Минск. – 2012. – 300с.*
13. *Канеман Д. Принятие решений в неопределенности: Правила и предубеждения / Д. Канеман, П. Словик, А. Тверский // – Харьков, 2005. – 350с.*
14. *Перепелица В. А. Дискретная оптимизация и моделирование в условиях неопределенности данных / В.А. Перепелица, Ф. Б. Тебуева // Москва .2007. – 150 с.*
15. *Debnath, A. (2013). Deblurring and Denoising of Magnetic Resonance Images using Blind Deconvolution Method. [Електронный ресурс]/ A. Debnath, H. Rai, C. Yadav, A. Agarwal // In Journal of Computer Applications vol. 81, 7 – 12. – Режим доступа – https://www.semanticscholar.org/paper/Deblurring-and-Denoising-of-Magnetic-Resonance-Debnath-Rai/28db34037d247489433e3fd9b128fa1669082326*
16. *Cichocki, A. Tensor decompositions for signal processing applications: From twoway to multiway component analysis. [Електронный ресурс] / A. Cichocki et al. // Signal Processing Magazine. – 2015. – Vol. 32. – С.145 – 163. – Режим доступа. – Doi: 10.1109/MSP.2013.2297439 .*
17. *Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений в среде MATLAB / Р. Гонсалес, Р. Вудс, С. Эддинс // Москва. Россия. – 2006. – 245 с.*
18. *Chaudhuri S. Blind Image Deconvolution: Methods and Convergence. [Електронный ресурс] /S. Chaudhuri, R. Velmurugan, R. Rameshan // Springer International Publishing, (2014). – Режим доступа – https://doi.org/10.1007/978-3-319-10485-0.*
19. *Hansen C. Deblurring images: Matrices, spectra, and filtering / C. Hansen, J.G. Nagy, D.P. O'Leary // SIAM, Philadelphia Arxiv. – 2006. – 130 с.*
20. *Gray R. M. Toeplitz and Circulant Matrices [Електронный ресурс]. A review. Department of Electrical Engineering Stan-ford University. Stanford 94305. – 2018. – Режим доступа- https://ee.stanford. edu/~gray/toeplitz.*
21. *Тыртышников Е. Методы численного анализа на основе тензорных представительств [Електронный ресурс] /Е.Тыртышников//. – 2012. – Режим доступа-http://mpamcs2012.jinr.ru/file/tyrtyshnikov.pdf.*
22. *Тыртышников Е. Тензорные аппроксимации матриц, порожденных асимптотически гладкими функциями [Електронный ресурс] / Е. Тыртышников // Журнал Математический сборник. – 2003. – Вып. 194. – С. 147 – 160. – Режим доступа. – https://doi.org/10.4213/sm747.*
23. *Minayev Yu.N. Kronekerovy (tenzornyye) modeli nechetko-mnozhestvennykh granul. [Електронный ресурс] / Yu.N. Minayev, O.Yu. Filimonova, J.I. Minayeva // Kibernetika i sistemnyy analiz. – 2014. – Vol. 50(4). – С.42 – 52. – Режим доступа- https://doi.org/10.1007/s10559-014-9640-6*
24. *Заде Л. Понятие лингвистической переменной и ее применение к принятию приближенных решений / Лю Заде. – М., 1976. – 255 с.*
25. *Pajarola R. Tutorial: Tensor Decomposition Methods in Visual Computing. Tensor Decomposition Models. [Електронный ресурс] / R. Pajarola, l R. Ballester-Ripol // 2019. – Режим доступа- https://www.ifi.uzh.ch/dam/jcr:ded4873d-64d8- 4ecf-b60f-2fb2742d9c16/TA_Tutorial_Part1.pdf.*

26. De Lathauver L. A Multilinear Singulatr Value Decomposition. [Електронный ресурс] / L. De Lathauver, B. De Moor, J. Vanderwalle // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications/ –2000. – Vol. 21(4). – С. 1253–1278. – Режим доступа – https://epubs.siam.org/doi/10.1137/S0895479896305696.

27. Sebastian S. Multi-Fuzzy Sets. [Електронный ресурс] / S. Sebastian, T. Ramakrishnan // International Maths Forum. – 2010. – Vol. 50, С.2471 – 2476. – Режим доступа- https://www.researchgate.net/publication/284899193_Multi-Fuzzy_Sets.

28. Costantini R. Higher order SVD analysis for dynamic texture synthesis. [Електронный ресурс] / R. Costantini, L. Sbaiz, S. Susstrunk // Journal IEEE Trans. Image Process. – 2008. – Vol. 17(1). – С. 42 – 52. – Режим доступа – https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/18229803

29. Minayev Yu.N. Multi-fuzzy sets as aggregation subjective and objective fuzziness. [Електронный ресурс] / Yu.N. Minayev, O.Yu. Filimonova, J.I. Minayeva // Mathematics. Information Technologies. Education "Modern Machine Learning Technologies and Data Science, MoMLeT and DS 2019. -2019. – С.163-183. -режим доступа-http://ceur-ws.org/Vol-2386/

Статья поступила в редколлегию 12.02.2020

Мінаєва Юлія Іванівна
Кандидат технічних наук, докторант кафедри основ інформатики, *orcid.org/0000-0002-1168-1927*
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ
Філімонова Оксана Юріївна
Кандидат технічних наук, доцент кафедри основ інформатики, *orcid.org/0000-0002-6394-0636*
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

АЛЬТЕРНАТИВНІ ПІДМНОЖИНИ ВПОРЯДКОВАНИХ ПАР І ЇХНЄ ЗАСТОСУВАННЯ В ЗАДАЧАХ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Анотація. *В економічній науці з'явився новий науковий напрям, пов'язаний з так званою теорією перспектив, який виявся в числі провідних для прийняття рішень в умовах невизначеності не тільки для економічної науки. Теорія нечітких множин (ТНМ), в якій нечітка множина (НМ) – один із видів численних НЕ-факторів, потребує якісної модернізації, оскільки ми маємо обмежену можливість вирішення багатьох класів задач. Використання НМ є практично універсальним для розв'язання задач в різних сферах, якщо там має місце невизначеність, неточність, але при цьому слід враховувати складнощі при виборі функції належності (ФН). Вибір ФН людиною (експертом) відбувається на основі здорового глузду, досвіду, тож не завжди є раціональним. Для розв'язання задач в умовах невизначеності авторами запропоновано використання тензорної методології. Наведено можливість формування підмножини упорядкованих пар на підставі тензоризації інтервалу універсальної множини з подальшою декомпозицією. Як один зі способів тензоризації і врахування феномена нечіткості запропоновано використовувати матрицю Тепліца, яка найбільш ефективно моделює нечіткість. Універсальна множина (УМ), на якій сформовано НМ, в тензорному форматі містить приховану інформацію, яка може бути використана при прийнятті рішення не менш ефективно, ніж евристично призначена ФН. Крім того, наявність формально обчисленої підмножини упорядкованих пар (ПмУП) може служити переконливим порівняльним прикладом: маючи дане ПмУП, можна об'єктивно відмовитися від призначення евристичної ФН. ПмУП володіють істотно меншою інтервальною невизначеністю. Альтернативні ПмУП сформовані однаково, характеристики, на підставі яких порівнюються НМ і ПмУП, досить близькі або практично збігаються. Наведено приклади, що засвідчують більш високу ефективність використання ПмУП у порівнянні зі стандартно сформованими НМ.*

Ключові слова: прийняття рішень; умови невизначеності; нечітка множина; функція належності; тензор; сингулярна декомпозиція; тепліцева матриця; підмножина упорядкованих пар

Minaeva Julia I.
PhD (Eng.), *orcid.org/0000-0002-1168-1927*
Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv
Filimonova Oksana Yu.
PhD (Eng.), *orcid.org/0000-0002-6394-0636*
Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

ALTERNATIVE SUBSETS OF ORDERED PAIRS AND THEIR APPLICATION IN DECISION-MAKING PROBLEMS UNDER CONDITIONS OF UNCERTAINTY

Abstract. *In economic science, a new scientific direction has appeared, associated with the so-called prospects theory, which has been among the leading for decision-making under conditions of uncertainty, not only for economic science. The fuzzy set theory, in which the fuzzy set (FS) is one of the types of numerous Non-factors, needs a qualitative modernization since we have a limited possibility to solve many classes of problems. The usage of fuzzy sets is almost universal for solving problems in different* *fields if there is uncertainty, inaccuracy. At the same time, the difficulty in choosing the membership function should be considered. The process of choosing an MF by a person (expert) is based on common sense, experience, and is not always rational. For solving tasks in conditions of uncertainty, the authors proposed the use of the tensor methodology. The authors showed the possibility to form a subset of ordered pairs based on the tensorization of the interval of a universal set with subsequent decomposition. It was suggested to use Toeplitz matrix, most effectively modeling fuzziness, as one of the ways of tensorization and taking into account the phenomenon of fuzziness. The universal set (US) on which the FS is formed contains, in the tensor format, hidden information that can be used to make a decision no less effectively than the heuristically assigned membership function, in addition, the existence of a formally calculated subset of ordered pairs (SsOP) can serve as a convincing comparative example: Having this SsOP, you can objectively refuse to assign a heuristic MF; SsOP has significantly less interval uncertainty. Alternative SsOP are formed in a uniform manner. Basic characteristics for FS and SsOP comparison are quite close or practically coincide. Examples that illustrate the higher efficiency of SsOP usage in comparison with standardly spaced FS are given.*

Keywords: decision making; uncertainty conditions; fuzzy set; membership function; tensor; singular decomposition; toeplitz matrix; subset of ordered pairs

References

1. *Zimmermann, H.-J. (2001). Fuzzy set theory and its applications. 4-th edn. Publisher, Kluwer Pub., Boston. [In USA].*
2. *Hanss, M. (2001). Applied Fuzzy Arithmetic: An Introduction with Engineering Applications. Springer Science & Business Media. Retrieved from https://www.springer.com/gp/book/9783540242017#.*
3. *Val'kman, Yu.R., Bykov, V.S., Rykhal'skiy, A.Yu. (2007). Modelling of NE-factors – bases of intellegement. System investigations and information technologies, 1, 39-61. Kyiv [In Ukraine].*
4. *Ashfaq, M.S. (2018) A Tribute to Father of Fuzzy Set Theory and Fuzzy Logic. International Journal of Swarm Intelligence and Evolutionary Computation, 7 (2), 1-5. Retrieved from https://www.longdom.org/open-access/a-tribute-to-father-of-fuzzy-set-theory-and-fuzzy-logic-dr-lotfi-azadeh-2090-4908-1000170.pdf.*
5. *Narinyani, A.S. (2008) Non-factors: Inaccuracy and Underdeterminacy- distinction and interrelation (pre-formal research). Retrieved from http://viperson.ru/articles/aleksandr-narinyani-ne-faktory-netochnost-i-nedoopredelennost-razlichie-i-vzaimosvyaz.*
6. *Narinyani, A.S. (2004). Knowledge Engineering and Non-Factors: An Overview. Retrieved from http:// www. computer-museum.ru/frgnhist/ne-faktor.htm.*
7. *Black, M. (1997). Vagueness: An exercise in logical analysis. Philosophy of Science 4: Reprinted in R. Keefe, P. Smith (eds.): Vagueness: A Reader, MIT Press, 427–455.*
8. *ZadehL. A. (1965). Fuzzy Sets. In: Journal of Information and control, 8, 338-353. Retrieved from https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001999586590241X.*
9. *Hisdal, E. (1988). The Philosophical interpretation of the theory of fuzzy sets. Journal of Fuzzy Sets and Systems, 25, 349-356. Retrieved from https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/016501148890019X.*
10. *Seising, R. (2009). Fuzzy Sets and Systems and Philosophy of Science. Views on Fuzzy Sets and Systems from Different Perspectives. Studies in Fuzziness and Soft Computing, 243, 1-35. Springer, Berlin, Heidelberg. [In FRG].*
11. *Vyatchenin, D. A. (1998). The problem of fuzziness as a scientific concept: philosophical and methodological analysis; Filosofiy nauki i texniki 09.00.08, Extended abstract of candidate's thesis. Sumy: SumSU. [In Belarus].*
12. *Vyatchenin D. A., Khizhnyak, A. V. ShevyakovA.V. (2012). Fuzzy clustering and fuzzy mathematical morphology in image processing problems: Monography. Minsk. [In Belarus].*
13. *Kaneman D., Slovik P., Tverski A. (2005). Judgment under Uncertainty: Heuristics and biases. Khar'kov. [In Ukraine].*
14. *Perepelitsa V.A., Tebuyeva F.B. (2007). Discrete optimization and modeling in the face of data uncertainty Moscou. [In Russia].*
15. *Debnath, A., Rai, H., Yadav, C., Agarwal, A. (2013). Deblurring and Denoising of Magnetic Resonance Images using Blind Deconvolution Method. Journal of Computer Applications, 81, 7-12. Retrieved from https://www.semanticscholar.org/paper/Deblurring-and-Denoising-of-Magnetic-Resonance-Debnath-Rai/28db34037d247489433e3fd9b128fa1669082326.*
16. *Cichocki, A. et al. (2015). Tensor decompositions for signal processing applications: From twoway to multiway component analysis. Journal Signal Processing Magazine, 32, 145 – 163. Doi: 10.1109/MSP.2013.2297439 .*
17. *Gonsales, R., Vuds, R., Eddins, S. (2006). Digital image processing in MATLAB / R. Gonzalez, R. Woods, S. Eddins // Moscow, 245. [In Russia].*
18. *Chaudhuri, S., Velmurugan, R., Rameshan, R. (2014). Blind Image Deconvolution: Methods and Convergence. Springer International Publishing. Retrieved from https://doi.org/10.1007/978-3- 319-10485-0.*
19. *Hansen, C., Nagy, J.G., O'Leary, D.P. (2006). Deblurring images: Matrices, spectra, and filtering. SIAM, PA, 130.*
20. *Gray, R.M. (2018). Toeplitz and Circulant Matrices: A review. Department of Electrical Engineering Stan-ford University. Stanford, 94305. Retrieved from https://ee.stanford. edu/~gray/toeplitz. last accessed 2018/10/19. [In USA].*
21. *Tyrtyshnikov Ye. (2012). Methods of numerical analysis based on tensor representations. International Conference Schooi for Young Scientists "MPAMCS" Dubna. Russia. Retrieved from http://mpamcs2012.jinr.ru/file/tyrtyshnikov.pdf. last accessed 2019/05/12.*
22. *Tyrtyshnikov Ye. (2003). Tenzor approksimations of matrices, generated by asymptotically smooth funktions. In: Journal Sbornik Mathematics, vol. 194, 147–160. Retrieved from https://iopscience.iop.org/article/10.1070/SM2003v194n06ABEH000747.*

23. Minaev Yu. N., Filimonova O. Yu., Minaeva J. I. (2014). Kronecker (tensor) models of fuzzy-set granules. In: Cybern. Syst. Analysis, vol. 50(4). 42 – 52. Retrieved from https://doi.org/10.1007/s10559-014-9640-6.

24. Zade, L. (1976). The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning. Moscow, 167.

25. Pajarola, R., Ballester-Ripol, R. (2019). Tutorial: Tensor Decomposition Methods in Visual Computing. Tensor Decomposition Models. Retrieved from https://www.ifi.uzh.ch/dam/jcr:ded4873d-64d8-4ecf-b60f-fb2742d9c16/TA_Tutorial_Part1.pdf.

26. De Lathauver, L., De Moor, B., Vanderwalle, J. (2000). A Multilinear Singulatr Value Decomposition. Journal SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 21(4), 1253–1278. Retrieved from https://epubs.siam.org/doi/10.1137/S0895479896305696.

27. Sebastian, S., Ramakrishnan, T. (2010). Multi-Fuzzy Sets. Journal International Maths Forum International Maths Forum, 50, 2471–2476. Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/284899193_Multi-Fuzzy_Sets.

28. Costantini, R., Sbaiz, L., Susstrunk, S. (2008). Higher order SVD analysis for dynamic texture synthesis. Journal IEEE Trans. Image Process, 17(1), 42–52. Retrieved from https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/18229803.

29. Minayev, Yu.N., Filimonova, O.Yu., Minayeva, J.I. (2019). Multi-fuzzy sets as aggregation subjective and objective fuzziness. Mathematics. Information Technologies. Education "Modern Machine Learning Technologies and Data Science, MoMLeT and DS 2019. Retrieved from http://ceur-ws.org/Vol-2386/[In Ukraine].

Посилання на публікацію

APA *Minaeva, Julia & Filimonova, Oksana. (2020). Alternative subsets of ordered pairs and their application in decision-making problems under conditions of uncertainty. Management of Development of Complex Systems, 41, 68 – 82; dx.doi.org\10.32347/2412-9933.2020.41.68-82.*

ГОСТ *Минаева Ю.И. Альтернативные подмножества упорядоченных пар и их применение в задачах принятия решений в условиях неопределенности [Текст] / Ю.И. Минаева, О.Ю. Филимонова // Управление развитием сложных систем. – 2020. – №41. – С. 68 – 82; dx.doi.org\10.32347/2412-9933.2020.41.68-82.*