

Пилипака Сергій Федорович

Доктор технічних наук, завідувач кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну,
orcid.org/0000-0002-1496-4615

Національний університет біоресурсів і природокористування України, Київ

Кресан Тетяна Анатоліївна

Кандидат технічних наук, докторант кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну,
orcid.org/0000-0002-8280-9502

Національний університет біоресурсів і природокористування України, Київ

Грищенко Ірина Юріївна

Кандидат технічних наук, доцент кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну,
orcid.org/0000-0002-1000-9805

Національний університет біоресурсів і природокористування України, Київ

Бабка Віталій Миколайович

Кандидат технічних наук, доцент кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну,
orcid.org/0000-0003-4971-4285

Національний університет біоресурсів і природокористування України, Київ

КОЧЕННЯ ПОВЕРХНІ БІНОРМАЛЕЙ ГВИНТОВОЇ ЛІНІЇ ПО СВОЄМУ ЗГИНАННЮ

***Анотація.** Відомо, що нерозгортні поверхні теж можуть котитися по своєму згинанню. Якщо ці поверхні лінійчаті, то контактом обох поверхонь при коченні теж є спільні прямолінійні твірні. При коченні таких поверхонь теж відбувається суміщення відповідних твірних із проходженням однакових, тобто рівних шляхів. Фізична суть такого кочення полягає в тому, що при згинанні поверхні довжина ліній і площ відповідних відсіків не змінюється, отже при коченні однієї поверхні по іншій їхні точки проходять однаковий шлях, тобто кочення відбувається без ковзання. Важливим є визначення аналітичного опису процесу згинання поверхонь. Він базується на тому, що лінійний елемент, тобто перша квадратична форма, при згинанні поверхні не змінюється. Аналітичний опис такого кочення є непростю задачею, яка може бути розв'язана тільки для окремих класів поверхонь. В теорії згинання поверхонь вона зводиться до відшукування такої квадратичної форми вихідної поверхні, яка для її згинань має один і той же вираз. Найбільш простим випадком такого аналітичного опису згинання нерозгортної лінійчатої поверхні є згинання поверхні бінормалей просторової кривої. До виразу її першої квадратичної форми не входить кривина цієї кривої. Звідси випливає, що незмінність першої квадратичної форми поверхні можна забезпечити зміною кривини кривої. В роботі це розглянуто на прикладі гвинтової лінії. Математично доведено, що поверхня бінормалей, якою є гелікоїд, може бути зігнута на гвинтовий коноїд. Здійснено математичний опис двох поверхонь, які згинаються одна на одну, і які торкаються одна одної вздовж спільної прямолінійної твірної. Однією із цих поверхонь є вихідна, а іншою – її згинання, включаючи і гвинтовий коноїд. Наведено параметричні рівняння вихідної поверхні і її згинання за умови, що вони перебувають у контакті одна з одною вздовж спільної прямолінійної твірної.*

***Ключові слова:** лінійчаті поверхні; кочення поверхонь; поверхня бінормалей; гвинтова лінія; згинання поверхні*

Вступ

Кочення поверхонь одна по одній без ковзання цікаве з точки зору передачі обертального руху. Найпростішим прикладом є перекочування рухомого циліндра по нерухомому. У такому випадку вісь обертання рухомого циліндра теж описує

циліндричну поверхню. У випадку колових циліндрів їх осі обертання можуть бути нерухомими. Обертальний рух від одного циліндра до іншого здійснюється за наявних сил тертя між поверхнями обох циліндрів. На відміну від циліндричних передач із паралельними осями, у конічних передачах осі перетинаються. Такі передачі, які працюють за

рахунок тертя між поверхнями, називаються фрикційними. У них є суттєвий недолік: вони не можуть передати крутний момент великої потужності. Однак такі поверхні є базовими для проектування потужних зачеплень для передачі обертального руху, зокрема зубчастих.

У статті розглянуто кочення нерозгортних лінійчатих поверхонь одна по одній на прикладі згинань поверхні бінормалей гвинтової лінії. На відміну від поверхонь обертання, кочення яких одна по одній добре вивчене, кочення гвинтових поверхонь потребує додаткових досліджень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Широковідомими є праці із дослідження кочення однопорожнинних гіперболоїдів обертання один по одному [1 – 3]. Вони служать аксоїдами при проектуванні зубчастих зачеплень для передачі крутного моменту між мимобіжними осями [4; 5]. Суттєвим їх недоліком є наявність ковзання і, відповідно, сил тертя при коченні один по одному. Стосовно гвинтових лінійчатих поверхонь, які котяться одна по одній без ковзання, можна навести працю, в якій розроблена математична модель кочення згинань торса-гелікоїда [6], а також графоаналітична реалізація цього підходу [7]. У класичній праці [8] зазначено, що кочення поверхонь одна по одній без ковзання може відбуватися у тому випадку, коли ці поверхні згинаються одна на одну. У працях [9 – 11] розглянута можливість формування нових лінійчатих поверхонь на основі кочення двох заданих.

Мета статті

Здійснити аналітичний опис процесу кочення поверхні бінормалей гвинтової лінії по своєму згинанню.

Виклад основного матеріалу

Для аналітичного опису кочення поверхні бінормалей гвинтової лінії по своєму згинанню потрібно спочатку знайти множину таких згинань. Згинати поверхню бінормалей будемо деформацією гвинтової лінії, яка є для поверхні вихідною напрямною кривою. Оскільки при такій деформації довжини ліній поверхні не змінюються, включаючи і вихідну криву, то за незалежну змінну у параметричних рівняннях вихідної гвинтової лінії доцільно взяти довжину її дуги s . Форма гвинтової лінії характеризується радіусом циліндра r , на якому вона розташована, і кутом підйому β . Параметричні рівняння гвинтової лінії, у які входять перераховані параметри, запишемо:

$$\begin{aligned}x &= r \cos\left(\frac{\cos\beta}{r}s\right); \\y &= r \sin\left(\frac{\cos\beta}{r}s\right); \\z &= s \sin\beta.\end{aligned}\quad (1)$$

У праці [12, с. 327] наведені коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні бінормалей просторової кривої. Зважаючи на те, що до них не входить вираз кривини напрямної лінії, тільки скрут, робимо висновок, що криву можна трансформувати зміною її кривини таким чином, щоб вирази коефіцієнтів першої квадратичної форми поверхні залишалися незмінними. А це означає, що при трансформації вихідної гвинтової лінії із кутом підйому β ми маємо отримати іншу гвинтову лінію із кутом підйому β_b за умови, що вирази їх кривин різні, але вирази скруту незмінні. Зважаючи на те, що форма гвинтової лінії залежить тільки від двох параметрів – радіуса r циліндра, на якому вона розташована, і кута підйому β , робимо висновок, що при переході від кута β до кута β_b має відбутися перехід від радіуса r до нового радіуса r_b . Залежність між радіусами r і r_b та кутами β і β_b знайдемо на основі незмінності скруту σ гвинтової лінії (1). Скрут гвинтової лінії є сталий. Його визначаємо за відомою формулою [12, стор. 104] через радіус r і гвинтовий параметр $h=tg\beta$:

$$\sigma = \frac{h}{r^2 + h^2}.\quad (2)$$

Підставимо $h=tg\beta$ в (2) і прівірняємо вираз скруту до і після трансформації гвинтової лінії:

$$\sigma = \frac{\sin\beta \cos\beta}{r} = \frac{\sin\beta_b \cos\beta_b}{r_b}.\quad (3)$$

Трансформувати гвинтову лінію будемо зміною її кута підйому множенням на сталу величину p : $\beta_b=p\cdot\beta$. Після зміни кута підйому від початкового значення β до нового β_b зміниться також і радіус циліндра, на якому розташована гвинтова лінія. Нове значення r_b знайдемо із рівності (3):

$$r_b = \frac{r \sin 2p\beta}{\sin 2\beta}.\quad (4)$$

Підставимо нові вирази $\beta_b=p\cdot\beta$ і (4) у (1) замість вихідних і отримаємо параметричні рівняння гвинтової лінії:

$$\begin{aligned}x &= \frac{r \sin 2p\beta}{\sin 2\beta} \cos\left(\frac{\sin\beta \cos\beta}{r \sin p\beta}s\right); \\y &= \frac{r \sin 2p\beta}{\sin 2\beta} \sin\left(\frac{\sin\beta \cos\beta}{r \sin p\beta}s\right); \\z &= s \sin\beta.\end{aligned}\quad (5)$$

При $p=l$ рівняння (5) перетворюються у рівняння вихідної кривої (1). Щоб провести через гвинтову лінію (5) поверхню біномалей, потрібно мати вирази напрямних косинусів вектора біномалі. Вони визначаються через перші і другі похідні кривої (5) і мають вигляд [12, с. 104]:

$$\begin{aligned} l &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \\ m &= \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \\ n &= \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \end{aligned} \quad (6)$$

де $A = y'z'' - y''z'$; $B = z'x'' - z''x'$; $C = x'y'' - x''y'$.

Після підстановки у (6) перших і других похідних рівнянь (5) та спрощень отримаємо:

$$\begin{aligned} l &= \sin p\beta \sin \left(\frac{\sin \beta \cos \beta}{r \sin p\beta} s \right); \\ m &= -\sin p\beta \cos \left(\frac{\sin \beta \cos \beta}{r \sin p\beta} s \right); \\ n &= \cos p\beta. \end{aligned} \quad (7)$$

Запишемо параметричні рівняння лінійчатої поверхні, яка проходить через гвинтову лінію (5) і прямолінійні твірні якої паралельні одиничному вектору (7):

$$\begin{aligned} X &= \frac{r \sin 2p\beta}{\sin 2\beta} \cos \left(\frac{\sin \beta \cos \beta}{r \sin p\beta} s \right) + \\ &+ u \sin p\beta \sin \left(\frac{\sin \beta \cos \beta}{r \sin p\beta} s \right); \\ Y &= \frac{r \sin 2p\beta}{\sin 2\beta} \sin \left(\frac{\sin \beta \cos \beta}{r \sin p\beta} s \right) - \\ &- \sin p\beta \cos \left(\frac{\sin \beta \cos \beta}{r \sin p\beta} s \right); \\ Z &= s \sin \beta + u \cos p\beta, \end{aligned} \quad (8)$$

де u – друга незалежна змінна поверхні – довжина прямолінійної твірної, відлік якої починається від точки на гвинтовій лінії.

Наведемо коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні (8):

$$E = 1; F = 0; G = 1 + u^2 \frac{\sin^2 \beta \cos^2 \beta}{r^2}. \quad (9)$$

До виразів коефіцієнтів (9) не входить стала p , яку назвемо параметром згинання. Це свідчить про достовірність знайдених рівнянь (8). При $p=l$ маємо вихідну поверхню, при інших значеннях – зігнуту. Неважко помітити, що до виразу коефіцієнта G входить вираз скруту (3) у квадраті. На рис. 1 за рівняннями (8) побудовано фронтальні проєкції поверхонь біномалей гвинтової лінії при $r=2$, $\beta=15^\circ$ і різних значеннях параметра згинання p .

Потовщеною лінією зображено напрямну криву – вихідну гвинтову лінію. При $p=6$ кут підйому гвинтової лінії зріс у 6 разів і становить 90° . При цьому гвинтова лінія перетворилася у пряму, а поверхня біномалей – у гвинтовий коноїд. Таким чином, поверхню біномалей гвинтової лінії можна зігнути на гвинтовий коноїд.

Проєкції поверхонь на рис. 1 зображені у різних масштабах, оскільки в однаковому масштабі рис. 1, а був би дуже малим у порівнянні із рис. 1, б. Про ступінь невідповідності масштабів можна судити по довжині прямолінійних твірних, які є однаковими для всіх поверхонь і становлять 3 лінійні одиниці.

Щоб забезпечити контакт вихідної і зігнутої поверхні вздовж спільної прямолінійної твірної, потрібно одну із поверхонь (наприклад, зігнуту) повернути відповідним чином. У праці [6] для розв'язання цієї задачі запропоновано здійснити поворот системи координат, в якій описана деформована гвинтова лінія, за допомогою трьох кутів Ейлера з наступним її паралельним перенесенням.

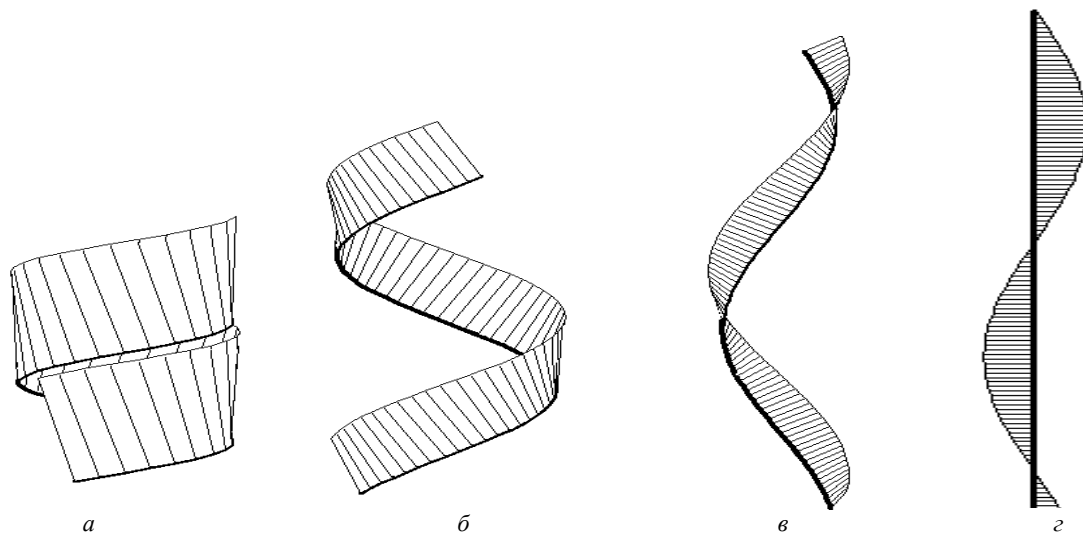


Рисунок 1 – Згинання поверхні біномалей гвинтової лінії: а – $p=1$; б – $p=2$; в – $p=4$; з – $p=6$

Такий поворот можна здійснити суміщенням супровідного тригранника вихідної гвинтової лінії і деформованої гвинтової лінії на зігнутій поверхні при однаковому значенні параметра s – довжини дуги цих кривих. Перший кут – кут нутації θ – для гвинтових ліній є сталим і дорівнює куту між ортами бінормалей. Його також можна знайти, як різницю між кутами β і β_b :

$$\theta = \beta_b - \beta = \beta(p-1). \quad (10)$$

Знайдемо вирази для кутів прецесії ψ і власного обертання φ . Вони закладені у рівняннях гвинтових ліній (1) і (5) [6]:

$$\varphi = -\frac{\cos \beta}{r} s; \quad \psi = \frac{\sin \beta \cos \beta}{r \sin p\beta} s. \quad (11)$$

Для повороту гелікоїда (8) потрібно мати вирази напрямних косинусів повернутої системи координат по відношенню до вихідної. Вони визначаються за відомими формулами через кути Ейлера:

$$\begin{aligned} l_x &= \cos \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \psi \sin \varphi; \\ l_y &= -\cos \psi \sin \varphi - \cos \theta \sin \psi \cos \varphi; \\ l_z &= \sin \theta \sin \psi; \\ m_x &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \theta \cos \psi \sin \varphi; \\ m_y &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \psi \cos \varphi; \\ m_z &= -\sin \theta \cos \psi; \\ n_x &= \sin \theta \sin \varphi; \\ n_y &= \sin \theta \cos \varphi; \\ n_z &= \cos \theta. \end{aligned} \quad (12)$$

Параметричні рівняння повернутого гелікоїда запишемо:

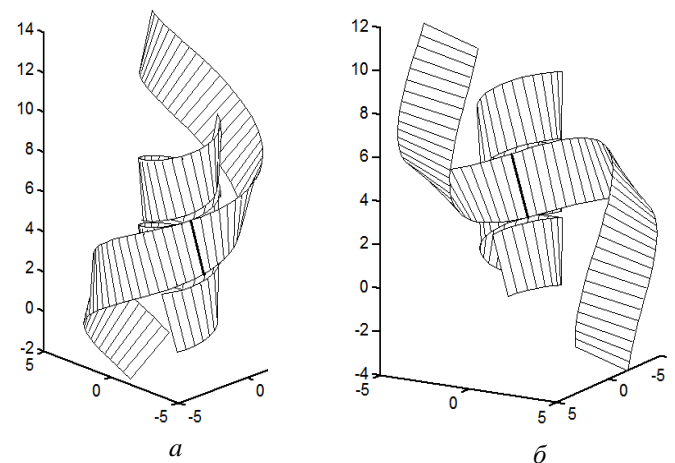
$$\begin{aligned} X_n &= Xl_x + Ym_x + Zn_x; \\ Y_n &= Xl_y + Ym_y + Zn_y; \\ Z_n &= Xl_z + Ym_z + Zn_z, \end{aligned} \quad (13)$$

де $X=X(s, u)$, $Y=Y(s, u)$, $Z=Z(s, u)$ – параметричні рівняння гелікоїда (8) до повороту.

Для того щоб повернутий гелікоїд торкався вздовж спільної прямолінійної твірної вихідного гелікоїда, необхідно зробити паралельне перенесення системи координат зігнутого гелікоїда на певні відрізки x_0 , y_0 , z_0 вздовж осей вихідного гелікоїда. Вказані відрізки знаходимо, як різницю відповідних координат за формулами (13) і формулами (8) при $u=0$ і $s=s_0$, причому для вихідної гвинтової лінії при $p=1$, а для деформованої і повернутої гвинтової лінії – при прийнятому значенні $p \neq 1$. Після цього параметричні рівняння (13) остаточно запишемо:

$$\begin{aligned} X_n &= Xl_x + Ym_x + Zn_x + x_0; \\ Y_n &= Xl_y + Ym_y + Zn_y + y_0; \\ Z_n &= Xl_z + Ym_z + Zn_z + z_0. \end{aligned} \quad (14)$$

За розробленим алгоритмом було побудовано дві поверхні, зображених на рис. 1, *a*, *b* зі спільною прямолінійною твірною дотику цих поверхонь. Вони зображені на рис. 2, на якому спільна лінія дотику зображена потовщеною лінією. Слід зауважити, що вихідною поверхнею може служити будь-яка із побудованих на рис. 1 поверхонь, оскільки всі вони можуть котитися одна по одній. При додатному p (рис. 2, *a*) кочення однієї поверхні по іншій відбувається внутрішнім чином, а при такому ж значенні p , але зі знаком «мінус» – зовнішнім. Якщо для обох поверхонь значення p однакове, то внутрішнє обкочування стає неможливим: рівняння (8) і (14) стають ідентичними, а поверхні, побудовані за ними, повністю збігаються. При однакових значеннях параметра p за величиною і протилежних за знаком буде відбуватися зовнішнє обкочування однакових відсіків гелікоїдів, однак при цьому у другого гелікоїда змінюється скрут напрямної гвинтової лінії на протилежний.



Рисунк 2 – Вихідна поверхня бінормалей гвинтової лінії при $r=2$, $\beta=15^\circ$ і $p=1$ дотикається до свого згинання вздовж спільних прямолінійних твірних: *a* – зігнута поверхня отримана при $p=2$ (кочення внутрішнє); *b* – зігнута поверхня отримана при $p=-2$ (кочення зовнішнє)

Якщо сукупність всіх прямолінійних твірних вихідної і зігнутої поверхонь, які мають спільну лінію дотику, провести із однієї точки, то вони утворять два напрямні конуси. На рис. 3, *a* зображено напрямний конус твірних, тобто бінормалей для вихідної поверхні, зображеної на рис. 2. Кут при вершині конуса складає 2β , тобто 30° . Направні конуси для поверхонь, що дотикаються, зображені на рис. 3, *б* (внутрішнє обкочування) і рис. 3, *в* (зовнішнє обкочування). Ці конуси є круговими, оскільки кут β сталий. Кут між осями конусів дорівнює куту нутації θ і визначається за формулою (10). Наприклад, для внутрішнього кочення при $p=2$ куту нутації $\theta=15^\circ$, а для зовнішнього при $p=-2$ відповідно $\theta=-45^\circ$ (при цьому кут θ виходить від’ємний).

Оскільки кут θ між осями конусів сталий, то вони можуть котитися один по одному, обертаючись навколо своїх нерухомих осей.

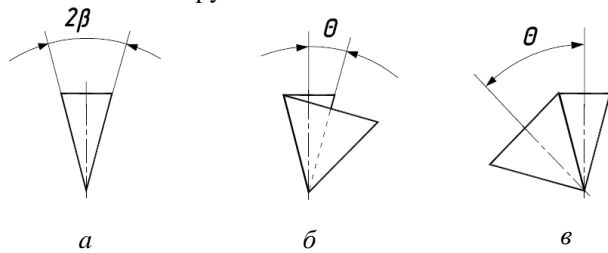


Рисунок 3 – Напрямні конуси поверхонь, зображених на рис. 2: а – напрямний конус вихідної поверхні; б – внутрішнє обкочування напрямних конусів; в – зовнішнє обкочування напрямних конусів

Відповідне кочення самих поверхонь теж можливе, але при цьому поверхні мають ковзати вздовж своїх нерухомих осей для забезпечення контакту вздовж спільної твірної. Осі поверхонь є мимобіжними. Відстань між ними дорівнює різниці радіусів циліндрів, на яких розташовані напрямні гвинтові лінії. У випадку зовнішнього обкочування з однаковими за величиною але протилежними за знаками параметрами p осі будуть перетинатися.

Для випадку, коли вихідна поверхня згинається на коноїд (див. рис. 1, з), відповідний конус перетворюється у круг. На рис. 4 побудовано вихідну

поверхню і деякі проміжні положення коноїда при його перекочуванні по вихідному гелікоїду.

Згідно формули (10) кут θ між осями поверхонь, зображених на рис. 4, становить 75° . Віссю коноїда є пряма, в яку перетворилася вихідна гвинтова лінія після згинання поверхні. Віссю вихідної поверхні є вертикальна пряма. Із врахуванням цього можна візуально оцінити величину кута θ із рис. 4.

Висновки

Одним із випадків згинання нерозгортних лінійчатих поверхонь зі збереженням прямолінійних твірних є згинання поверхні бінормалей просторової кривої. Деформувати криву потрібно так, щоб її скрут у функції довжини дуги залишався незмінним. При згинанні поверхні бінормалей гвинтової лінії частковим випадком зігнутої поверхні може бути коноїд. При коченні зігнутої поверхні по вихідній кут між осями гвинтових поверхонь залишається сталим. Це дає можливість замінити обкочування зігнутої поверхні по вихідній на обертальний рух обох поверхонь навколо нерухомих осей. Однак при цьому поверхні мають ковзати вздовж своїх осей для забезпечення контакту вздовж спільної твірної. Осі поверхонь є мимобіжними. Відстань між ними дорівнює різниці радіусів циліндрів, на яких розташовані напрямні гвинтові лінії.

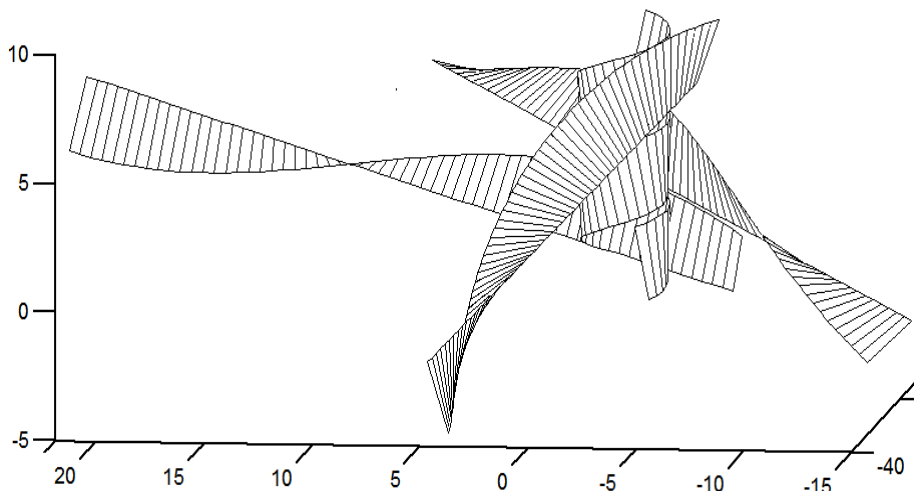


Рисунок – 4. Проміжні положення коноїда при його перекочуванні по гелікоїду ($r=2$, $\beta=15^\circ$, $p=1$ для гелікоїда і $p=6$ для коноїда)

Список літератури

1. Рачковская Г.С. Кинематические линейчатые поверхности на основе комплексного движения одного аксоида по другому (Однополостные гиперболоиды вращения в качестве неподвижного и подвижного аксоидов) / Г.С. Рачковская, Ю.Н. Харабаев // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2014. – № 3. – С. 23 – 30.
2. Рачковская Г.С. Математическое моделирование кинематических поверхностей на основе однополостного гиперболоида вращения в качестве неподвижного и подвижного аксоидов / Г.С. Рачковская // Электронный научный журнал «Инженерный вестник Дона», 2013. – № 1. [Электронный ресурс]. – URL: ivdon.ru/magazine/archive/nly2013/1499/.
3. Рачковская Г.С. Геометрическая модель и компьютерная графика кинематических линейчатых поверхностей на основе однополостного гиперболоида вращения в качестве неподвижного и подвижного аксоидов / Г.С. Рачковская // Транспорт, Ростов н/Д, 2012. – Ч. 2: Технические науки. – С. 190 – 192.

4. Воронцов Б.С. Гиперболоидные инструменты для изготовления цилиндрических колес с произвольным профилем зуба / Б.С. Воронцов // *Надійність інструменту та оптимізація технологічних систем: збірник наукових праць. Краматорськ, 2006. – Вип. 19. – С. 76–81.*
5. Гильберт Д. Наглядная геометрия / Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен. – Москва : Наука, 1981. – 285 с.
6. Мартиросов А.Л. О качении развертываемых поверхностей друг по другу / А.Л. Мартиросов // *Прикладная геометрия и инж. графика. – Київ: Будівельник, 1977. – Вип. 23. – С. 64 – 67.*
7. Обухова В.С., Пилипака С.Ф. Качение отсеков торсов по своему изгибанию [Текст] / В.С. Обухова // *Прикладная геометрия и инж. графика. – Київ: Будівельник, 1986. – Вип. 41. – С. 12 – 14.*
8. Шуликовский В.И. Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении / В.И. Шуликовский. – Москва: Физматгиз, 1963. – 540 с.
9. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н. Энциклопедия аналитических поверхностей. – Москва: Наука, 2010. – 556 с.
10. Peternell M. Conchoid surfaces of rational ruled surfaces / Peternell M., D. Gruber, J. Sendra // *Computer Aided Geometric Design, Volume 28, Issue. – P. 395-446. October 2011.*
11. Husty, M. (2012). On Some Surfaces in Kinematics. *Journal for Geometry and Graphics*, 16, 1, 47 – 58.
12. Милинский В.И. Дифференциальная геометрия. – Л.: Кубуч, 1934. – 332 с.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.2020

Пилипака Сергей Федорович

Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой начертательной геометрии, компьютерной графики и дизайна, orcid.org/0000-0002-1496-4615

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины, Киев

Кресан Татьяна Анатольевна

Кандидат технических наук, докторант кафедры начертательной геометрии, компьютерной графики и дизайна, orcid.org/0000-0001-9548-1959

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины, Киев

Грищенко Ирина Юрьевна

Кандидат технических наук, доцент кафедры начертательной геометрии, компьютерной графики и дизайна, orcid.org/0000-0002-1000-9805

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины, Киев

Бабка Виталий Николаевич

Кандидат технических наук, доцент кафедры начертательной геометрии, компьютерной графики и дизайна, orcid.org/0000-0003-4971-4285

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины, Киев

КАЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ БИНОРМАЛЕЙ ВИНТОВОЙ ЛИНИИ ПО СВОЕМУ ИЗГИБУ

Аннотация. Известно, что неразвертывающиеся поверхности тоже могут катиться по своему изгибанию. Если эти поверхности линейчатые, то контактом обеих поверхностей при качении тоже являются общие прямолинейные образующие. При качении таких поверхностей тоже происходит совмещение соответствующих образующих с прохождением одинаковых, то есть равных путей. Физическая суть такого качения состоит в том, что при изгибании поверхности длина линий и площадей соответствующих отсеков не меняется, поэтому при качении одной поверхности по другой их точки проходят одинаковый путь, то есть качения происходит без скольжения. Аналитическое описание такого качения является непростой задачей, которая может быть решена только для отдельных классов поверхностей. В теории изгибания поверхностей она сводится к отысканию такой квадратичной формы исходной поверхности, которая для ее изгибаний имеет одно и то же выражение. Наиболее простым случаем является описание изгибания поверхности бинормали пространственной кривой. В выражение ее первой квадратичной формы не входит кривизна этой кривой. Отсюда следует, что неизменность первой квадратичной формы поверхности можно обеспечить изменением кривизны кривой. В работе это рассмотрено на примере винтовой линии. Математически доказано, что поверхность бинормалей, которой является геликоид, может быть согнута на винтовой коноид. Осуществлено математическое описание двух поверхностей, которые изгибаются друг на друга и соприкасаются вдоль общей прямолинейной образующей. Одной из этих поверхностей является исходная поверхность, а другой – ее изгибание, включая и винтовой коноид. Приведены параметрические уравнения исходной поверхности и ее изгибания при условии, что они находятся в контакте друг с другом вдоль общей прямолинейной образующей.

Ключевые слова: линейчатые поверхности; качение поверхностей; поверхность бинормалей; винтовая линия; изгибание поверхности

Pilipaka Sergey

DSc (Eng.), Professor, Head of Department of Descriptive Geometry, Computer Graphics and Design, orcid.org/0000-0002-1496-4615
National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv

Kresan Tatyana

PhD (Eng.), Doctoral Student of Department of Descriptive Geometry, Computer Graphics and Design, orcid.org/0000-0001-9548-1959
National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv

Hryshchenko Irina

PhD (Eng.), Associate Professor of Department of Descriptive Geometry, Computer Graphics and Design, orcid.org/0000-0002-1000-9805

National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv

Babka Vitaly

PhD (Eng.), Associate Professor of Department of Descriptive Geometry, Computer Graphics and Design, orcid.org/0000-0003-4971-4285

National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv

ROLLING OF A DEVELOPABLE HELICOID OF THE SCREW LINE ALONG ITS BENDING

Abstract. Nondevelopable surfaces can also roll along their bending. If these surfaces are ruled, then the contact of both surfaces when rolling is also a common rectilinear generators. When rolling such surfaces, there is also a combination of the corresponding generators with the passage of the same, equal paths. The physical essence of such rolling is that when bending the surface, the length of the lines and areas of the respective compartments does not change, so when rolling one surface to another their points go the same way, that is, the rolling occurs without sliding. It is important to find an analytical description of the process of bending surfaces. It is based on the fact that the linear element, that is, the first quadratic shape, does not change when the surface is bent. Finding such an analytic description is a daunting task that can only be solved for individual classes of surfaces. In the theory of bending of surfaces, it is reduced to finding such a quadratic shape of the initial surface, which for its bending has the same expression. The simplest case of such an analytical description of the bending of a nondevelopable ruled surface is the bending of the surface of the binomials of the spatial curve. The expression of its first quadratic form does not include the curvature of this curve. It follows that the invariance of the first quadratic form of the surface can be ensured by changing the curvature of the curve. In this paper we consider the example of a screw line. It is mathematically proved that the surface of binomials, which is a helicoid, can be bent on a screw conoid. A mathematical description of two bending surfaces touching each other along a common rectilinear generator is made. One of these surfaces is the original, and the other is its bending, including the screw conoid. Parametric equations of the initial surface and its bending are provided, provided that they are in contact with each other along a common rectilinear generator.

Key words: ruled surfaces; surface rolling; surface of binormals; helix, surface bending

References

1. Rachkovskaya, G.S. (2014). Kinematic linear surfaces based on the complex movement of one axoid in. *Construction mechanics of engineering structures and structures*, 3, 23 – 30.
2. Rachkovskaya, G.S. (2013). *Mathematical Modeling of Kinematic Surfaces Based on Single-Body Hyperboloid Rotation as Fixed and Moving Axoids*. *Electronic Scientific Journal "Engineering bulletin of Don"*, 1: [Electronic resource]. – URL: ivdon.ru/magazine/archive/nly2013/1499/.
3. Rachkovskaya, G.S. (2012). *Geometric model and computer graphics of kinematic linear surfaces based on single-body hyperboloid of rotation as fixed and movable axoids*. *Transport, Rostov n/D. Part 2: Technical sciences*, 190 – 192.
4. Vorontsov, B.S. (2006). *Hyperboloidal tools for production of cylindrical wheels with any profile of tooth. Reliability of tools and optimization of process systems*. *Kramatorsk*, 19, 76 – 81.
5. Gilbert, D., Cohn-Fossen, S. (1981). *Visual Geometry*. Moscow: Science, 285.
6. Martirosov, A.L. (1977). *On rolling of deployed surfaces on each other*. Kyiv: «Budyvelnyk», 23, 64 – 67.
7. Obukhova V.S., & Pilipaka, S.F., (1986). *Rolling of torso compartments by its bending. Applied to geometry and int. graphics*. Kyiv: Budyvelnik, 41, 12 – 14.
8. Shulikovsky, V.I. (1963). *Classical differential geometry in tensor description*. Moscow: «Fizmatgiz», 540.
9. Krivoshapko, S.N., & Ivanov, V.N. (2010). *Encyclopedia of Analytical Surfaces*. Moscow: Science, 556.
10. Peternell, M., Gruber, D., & Sendra, J. (2011). *Conchoid surfaces of rational ruled surfaces*. *Computer Aided Geometric Design*, 28, 395 – 446.
11. Husty, M. (2012). *On Some Surfaces in Kinematics*. *Journal for Geometry and Graphics*, 16, 1, 47 – 58.
12. Milinsky, V.I. (1934). *Differential Geometry*. L.: Kubuch, 332.

Посилання на публікацію

- APA Pilipaka, Sergey, Kresan, Tatyana, Hryshchenko, Irina & Babka, Vitaly. (2020). *Rolling of a developable helicoid of the screw line along its bending*. *Management of Development of Complex Systems*, 41, 88 – 94, [dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2020.41.88-94](https://doi.org/10.32347/2412-9933.2020.41.88-94).
- ДСТУ Пилипака, С.Ф. Кочення поверхні бінормалей гвинтової лінії по своєму згинанню / С.Ф. Пилипака, Т.А. Кресан, І.Ю. Грищенко, В.М. Бабка // *Управління розвитком складних систем*. – 2020. – № 41. – С. 88 – 94, [dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2020.41.88-94](https://doi.org/10.32347/2412-9933.2020.41.88-94).