DOI: 10.32347/2412-9933.2020.42.102-106
УДК 514.182

Ковалев Сергей Николаевич
Доктор технических наук, профессор, профессор кафедры начертательной геометрии и инженерной графики, *orcid.org/0000-0002-7713-1768*
Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев
Мостовенко Александр Владимирович
Кандидат технических наук, доцент, доцент кафедри кафедры начертательной геометрии и инженерной графики, *orcid.org/0000-0002-3423-4126*
Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев,

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Аннотация. *Известно, что анализ погрешностей, возникающих при численном решении задач, является обязательной частью любого приближенного вычисления. Например, метод конечных разностей для формирования дискретных каркасов одномерных и двумерных геометрических образов, используемый для решения дифференциальных уравнений этих образов, при определении координат точечного каркаса линии или поверхности требует оценки погрешностей дискретизации, которые свойственны методу конечных разностей. С увеличением шага дискретизации точность исследований снижается, а при уменьшении – повышается. Однако уменьшение шага с одной стороны ведёт к увеличению числа конечноразностных уравнений, а с другой стороны – при неограниченном уменьшении шага возникает ситуация, когда погрешность округления коэффициентов в конечноразностных уравнениях превышает погрешность дискретизации. Каждое решение с уменьшением шага дискретизации даёт более точный результат, который монотонно изменяется, приближаясь к точному. Известно, что оценка погрешности дискретизации может проводитьсяза счёт гиперболической зависимостимежду результатами решения задачи и шагом дискретизации, представленным как некоторая длина, разделённая на пчастей. Эта зависимость представляется в виде равносторонней гиперболы, оси которой параллельны координатным осям декартовой системы координат. Но равносторонняя гипербола имеет три свободных параметра, что позволяет проводить её только через три точки, являющиеся результатами трёх решений задачи при различном шаге. В данном исследовании предложен способ увеличение числа свободных параметров геометрического аппарата, позволяющего учитывать больше трёх результатов решения задачи в дискретном виде для оценки погрешности дискретизации.*

Ключевые слова: интерполяция; погрешность; результат решения; дискретизация; геометрический аппарат; гипербола; парабола; шаг

Постановка проблемы

Известно, что оценка погрешности дискретизации может проводиться путем анализа гиперболической зависимости между результатами решения задачи и шагом дискретизации, представленным как некоторая длина, разделённая на n частей. Эта зависимость представляется в виде равносторонней гиперболы, оси которой параллельны координатным осям декартовой системы координат. Но равносторонняя гипербола имеет три свободных параметра, что позволяет проводить её только через три точки, являющиеся результатами трёх решений задачи при различном шаге.

Цель статьи

Целью данного исследования является создание способа оценки погрешности дискретизации на основе геометрического аппарата, который позволит увеличить число свободных параметров гиперболической зависимости между результатами решения задачив дискретном виде и шагом дискретизации.

Анализ последних исследований и публикаций

Известно [1; 2], что анализ погрешностей, которые возникают в результатах численного решения задач, является обязательной частью любого приближенного вычисления. Во многих работах эта зависимость представляется в виде равносторонней гиперболы.

Во многих случаях понятие экстраполяции употребляется в качестве противопоставления понятию интерполяции [3]. Однако, поскольку задачи экстраполяции функций решаются методами интерполяции, оба класса задач были объединены в одну проблему интерполяции [4].

Изложение основного материала

Зависимость между результатами решения задачи и шагом дискретизации, представленная некоторой функцией:

$$y = f(n), \tag{1}$$

может быть гораздо сложнее, чем та, которая моделируется равносторонней гиперболой m (рис. 1):

$$y = \frac{c^2}{2(x+p)} + q, \tag{2}$$

где c – длина действительной полуоси гиперболы; p, q – координаты центра гиперболы.

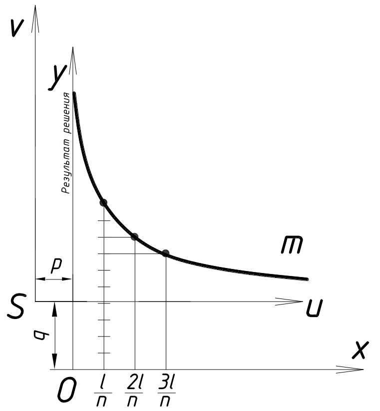

Рисунок 1

Эту зависимость можно уточнить, используя дополнительные значения функции (1) при изменении шага дискретизации, но гипербола (2) позволяет учесть не больше трёх различных значений решения задачи. При этом необходимо обеспечить монотонность изменения функции (1), наличие асимптоты, параллельной оси Ox, и взаимную однозначность соответствия между координатами x и yкривой m.

Введём дополнительную ось On, на которой будем откладывать число делений n (рис. 2). Через точку N ($n=n_1$) проведём параболу:

$$x = a_1(n-n_1) + a_2(n^2-n_1^2) + \\ + a_3(n^3-n_1^3) + ... + a_m(n^m-n_1^m), \tag{3}$$

где m – число коэффициентов параболы.

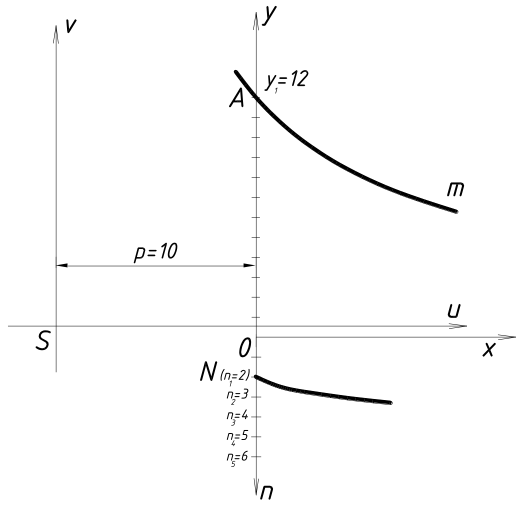

Рисунок 2

Используя первое известное значение функции (1), соответствующее параметру $n=n_1$, получим ординату точки A гиперболы (2) при x=0. Наличие точки A на оси Oy позволяет избавиться от параметра c^2 гиперболы (2):

$$x = \frac{p(y_1 - y)}{y - q}. \tag{4}$$

Исключая из (3) и (4) параметр x, получим уравнение зависимости $y = f(n)$:

$$(y-q)[a_1(n-n_1) + a_2(n^2-n_1^2) + ... \\ + a_m(n^m - n_1^m) + p] - p(y_1 - q) = 0. \tag{5}$$

При поочерёднойподстановкеизвестных значений y_i и n_i в (5) получим систему уравнений для определения параметров a_i параболы (3).

Если в этой системе уравнений неизвестными, кроме параметров a_i, являются также величины pиq, то все корни системы обнуляются. Поэтому из двух параметров p и qодин необходимо задать так, чтобы в системе уравнений появился свободный член. Поскольку параметр qопределяет асимптоту гиперболы (4), что соответствует искомому значению функции (5) при $n \to \infty$, заданным будем считать параметр p.

Тестовые примеры показали, что при величине p, приближённо равной величине y_A, погрешность определения величины p не превышает допустимой величины.

Пример.

Заданы пять значений функции (1) при последовательном увеличении числа разбиений интервала функции (1):
y_1=12, n_1=2; y_2=8, n_2=3; y_3=5, n_3=4; y_4=3, n_4=5; y_5=2, n_5=6.

Определить значение функции (1) при $n \to \infty$.

Уравнение (5) для данного примера принимает вид:

$$\left(y_i - q\right)[a_1\left(n_i - n_1\right) + a_2\left(n_i{}^2 - n_1^2\right) + \\ + a_3\left(n_i{}^m - n_1^3\right) + p] - p\left(y_1 - q\right) = 0. \quad (6)$$

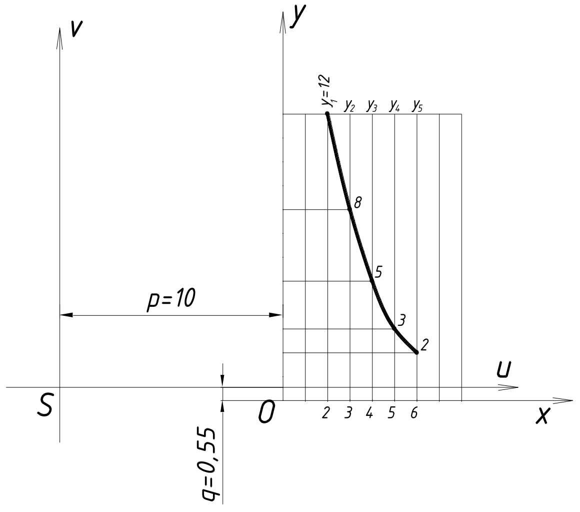

Рисунок 3

Подставляя заданные исходные данные в (6) и принимая p=10, имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned}&\left(8-q\right)\left(a_1+5a_2+23a_3+10\right)-10\left(12-q\right)=0;\\&\left(5-q\right)\left(2a_1+12a_2+56a_3+10\right)-10\left(12-q\right)=0;\\&\left(3-q\right)\left(3a_1+21a_2+117a_3+10\right)-10\left(12-q\right)=0;\\&\left(2-q\right)\left(4a_1+32a_2+208a_3+10\right)-10\left(12-q\right)=0.\end{aligned} \quad (7)$$

Результатом решениясистемы (7) является: a_1=-6,497; a_2=0,923; a_3=0,315; q=0,554.

График функции (6):

$$\left(y-0.554\right)[-6.497(n_i-2)+0.923(n_i^2-4)+ \\ +0.315(n_i^3-8)+10]-114.46=0 \quad (8)$$

приведен на рис. 3.

Выводы

Результатом данного исследования является создание геометрического аппарата для оценки погрешности дискретизации на основе гиперболической зависимости, который позволит увеличивать число свободных параметров этой зависимости между результатами решения задачи в дискретном виде и шагом дискретизации.

Список литературы

1. *Корн Г., Корн Е. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Е. Корн. – М.: Изд-во «Наука», 1968. – 720 с.*
2. *Daniel D. McCracken, William S. Dorn. Numerical Methods AndFortrain Programming // John Wiley & Sons, New York-London-Sydney: Halsted Press: Willey International Edition, Second Printing, 1965. – 584 p.*
3. *Математическая энциклопедия. Т.5 М.: Изд. Советская энциклопедия: 1985. – С. 954 – 955.*
4. *Математическая энциклопедия. Т.2 М.: Изд. Советская энциклопедия: 1979. – 618 с.*
5. *Ковальов С. М. Впливвідстанейміж точками інтерполянта та заданими точками на його форму [Текст] / С.М. Ковальов, О.В. Мостовенко // Управліннярозвиткомскладних систем. – 2019. – №37. – С. 78 – 82.*
6. *Ковалёв С.Н. Интерполяция точек на плоскости с учётом коэффициентов влияния заданных точек / С.Н. Ковалёв, А.В. Мостовенко// Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць. – Мелітополь: Вид-во МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2018. – Вип. 13. – С. 69 – 75.*
7. *Ковальов С.М. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Спеціальні розділи. Випуск 1 / С.М. Ковальов, М.С. Гумен, С. І. Пустюльга, В.Є. Михайленко, І. Н. Бурчак / – Луцьк: ЛДТУ, 2006. – 256 с.*
8. *Сергейчук О. В. Геометричне моделювання фізичних процесів при оптимізації форми енергоефективних будинків. Дис…д. техн. наук: 05.01.01. [Текст] / О.В. Сергейчук – К.: КНУБА, 2008. – 425 с.*
9. *Скочко В. І. Спеціальні геометричні моделі процесів, що розвиваються в суцільному середовищі: дис…канд. техн. наук: 05.01.01. [Текст] / В.І. Скочко – К.: КНУБА, 2012. – 269 с.*
10. *Арнольд В. И. Математические основы классической механики. – М.: Наука, 1974. – 432 с.*
11. *Скочко В.І. Пошук містків холоду у вузлах будівельної конструкції на основі спеціальних інтерполяційних функцій / В.І. Скочко / Науково-технічний збірник «Енергоефективність в будівництві та архітектурі». Вип. 4. Відповідальний редактор П.М. Куліков. – К.: КНУБА, 2013 р. – С. 259 – 264.*
12. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. – М.: Наука, 1981. – 344 с.*
13. *Энциклопедия элементарной математики. Книга V. Геометрия. / Гос. изд. технико-теоретической литературы: М. – Л., 1962. – 458 с.*

Статья поступила в редколлегию 23.03.2020

Ковальов Сергій Миколайович
Доктор технічних наук, професор кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки, *orcid.org/0000-0002-7713-1768*
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ
Мостовенко Олександр Володимирович
Кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки, *orcid.org/0000-0002-3423-4126*
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

ГІПЕРБОЛІЧНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ ПОХИБКИ ДИСКРЕТИЗАЦІЇ

Анотація. *Відомо, що аналіз похибок, що виникають при чисельних розв'язках задач, є обов'язковою частиною будь-якого наближеного обчислення. Наприклад, метод скінченних різниць для формування дискретних каркасів одновимірних і двовимірних геометричних образів, який використовується для розв'язання диференціальних рівнянь цих образів, при визначенні координат точкового каркасу лінії або поверхні вимагає оцінки похибок дискретизації, які властиві методу скінченних різниць. Зі збільшенням кроку дискретизації точність досліджень знижується, а при зменшенні – підвищується. Однак зменшення кроку з одного боку веде до збільшення числа кінцево-різницевих рівнянь, а з іншого боку – при необмеженному зменшенні кроку виникає ситуація, коли похибка округлення коефіцієнтів в кінцево-різницевих рівняннях перевищує похибку дискретизації. Кожне розв'язання зі зменшенням кроку дискретизації дає більш точний результат, який монотонно змінюється, наближаючись до точного. Відомо, що оцінювання похибки дискретизації може проводитися за рахунок гіперболічної залежності між результатами розв'язання задачі і кроком дискретизації, який представлено як деяка довжина, розділена на n частин. Ця залежність представляється у вигляді рівнобічної гіперболи, осі якої паралельні координатним осям декартової системи координат. Але рівнобічна гіпербола має три вільних параметри, що дає змогу проводити її через три точки, які є результатами трьох розв'язків задачі при різному кроці. У дослідженні запропоновано спосіб збільшення числа вільних параметрів геометричного апарату, що дає змогу враховувати більше трьох результатів розв'язання задачі в дискретному вигляді для оцінювання похибки дискретизації.*

Ключові слова: інтерполяція; похибка; результат розв'язання; дискретизація; геометричний апарат; гіпербола; парабола; крок

Kovalev Sergey
DSc, professor of the Department of Descriptive Geometry and Engineering Graphics, *orcid.org/0000-0002-7713-1768*
Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv
Mostovenko Oleksandr
PhD, lecturer of the Department of Descriptive Geometry and Engineering Graphics, *orcid.org/0000-0002-3423-4126*
Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

HYPERBOLIC INTERPOLATION FOR ASSESSMENT OF DAMAGES OF DISCRETIZATION

Abstract. *It is known that the analysis of errors arising from the numerical results of solving problems is an essential part of any approximate calculation. For example, the finite difference method for forming discrete skeletons of one-dimensional and two-dimensional geometric images, used to solve the differential equations of these images, when determining the coordinates of the point skeleton of a line or surface, requires an estimation of the sampling errors that are characteristic of the finite difference method. With an increase in the sampling step, the accuracy of studies decreases, and with a decrease, it increases. However, decreasing the step, on the one hand, leads to an increase in the number of finite difference equations, and on the other hand, with an unlimited decrease in the step, a situation arises where the rounding error of the coefficients in the finite difference equations exceeds the sampling error. Each solution with a decrease in the sampling step gives a more accurate result, which monotonically changes, approaching the exact one. It is known that the discretization error can be estimated due to the hyperbolic relationship between the results of solving the problem and the discretization step, presented as a certain length, divided into n parts. This dependence is represented in the form of an equilateral hyperbole, whose axes are parallel to the coordinate axes of the Cartesian coordinate system. But an equilateral hyperbole has three free parameters, which allows it to be drawn through three points, which are the results of three solutions to the problem at different steps. In this study, we propose a method for increasing the number of free parameters of a geometric apparatus, which allows one to take into account more than three results of solving the problem in a discrete form to estimate the sampling error.*

Keywords: interpolation; error; solution result; discretization; geometric apparatus; hyperbola; parabola; step

References

1. *Korn, H., & Korn E., (1968). A guide to mathematics for scientists and engineers. Moscow: Publishing house "Science", 720.*
2. *McCracken, Daniel, D., & Dorn, William, S., (1965). Numerical Methods And Fortrain Programming. John Wiley & Sons, New York-London-Sydney: Halsted Press: Willey International Edition, Second Printing, 584.*
3. *Mathematical encyclopedia. (1985). Vol.5. Ed. Soviet encyclopedia. Moscow: 954 – 955.*
4. *Mathematical encyclopedia. (1979). Vol.2. Ed. Soviet encyclopedia. Moscow: 618.*
5. *Kovalev, S., & Mostovenko, V., (2019). Injection between points of the interpolation and specified points on the form. Management of the development of folding systems, 37, 78 – 82.*
6. *Kovalev, S., & Mostovenko, V., (2018). Interpolation of points on a plane taking into account the coefficients of influence of given points. Modern problems of modeling: collection. Science. work. Melitopol: Melitopol State Pedagogical University Publishing House. B. Khmelnytsky, 13, 69 – 75.*
7. *Kovalev, S.M., Humen, M.S., Pustyulga, S.I., & Mikhailenko, V.E., (2006). Applied geometry and engineering graphics. Special sections. Lutsk: LSTU, 1, 256.*
8. *Sergeichuk, O.V., (2008). Geometric modeling of physical processes in the optimization of the shape of energy-efficient buildings. DSc thesis: 05.01.01. Kyiv: KNUBA, 425.*
9. *Skochko, V.I., (2012). Special geometric models of processes developing in a continuous environment: PhD thesis: 05.01.01. Kyiv: KNUBA, 269.*
10. *Arnold, V.I., (1974). Mathematical foundations of classical mechanics. Moscow: Nauka, 432.*
11. *Skochko, V.I., (2013). Search for cold bridges in building construction units on the basis of special interpolation functions. Scientific and technical collection Energy efficiency in construction and architecture. Editor-in-Chief P.M. Kulikov. Kyiv: KNUBA, 4, 259 – 264.*
12. *Hilbert, D., (1981). Con-Fossen S. Visual geometry. Moscow Nauka, 344.*
13. *Encyclopedia of Elementary Mathematics. (1962). Book V. Geometry. State. ed. technical and theoretical literature: Moscow – Leningrad, 458.*

Ссылка на публикацию

APA *Kovalev, Sergey & Mostovenko, Alexander, (2020). Hyperbolic interpolation for assessment of damages of discretization. Management of Development of Complex Systems, 42, 102 – 106, dx.doi.org\10.32347/2412-9933.2020.42.102-106.*

ГОСТ *Ковалев С.Н. Гиперболическая интерполяция для оценки погрешностей дискретизации [Текст] / С.Н. Ковалев, А.В. Мостовенко // Управление развитием сложных систем. – 2020. – № 42. – С. 102 – 106, dx.doi.org\10.32347/2412-9933.2020.42.102-106.*