

**Недін Валентин Олегович**Асистент кафедри основ інформатики, [orcid.org/0000-0003-3138-2892](https://orcid.org/0000-0003-3138-2892)

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

**ЧИСЕЛЬНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ СКЛАДНИХ  
ФОРМ ВИГИНУ СТРИЖНІВ ЗНАЧНОЇ ДОВЖИНИ ПРИ ОБЕРТАННІ**

***Анотація.** Представлено методику чисельного диференціювання складних форм вигину стрижнів значної довжини за допомогою поліноміальних функцій, яка разом із використанням методу інтегрування за часом застосовується для розв'язання задач динаміки коливального руху стрижнів, що обертаються, з урахуванням геометричної нелінійності та інших параметрів. В цій методиці моделювання коливань при обертанні з візуальним представленням результату в реальному часі здійснюється на основі багатократного (циклічного) розв'язку системи рівнянь коливального руху для кожної точки механічної системи з метою пошуку нових координат положення цих точок в кожний наступний момент часу  $t + \Delta t$ . Реалізація методики здійснена у комп'ютерній програмі з графічним інтерфейсом, що розроблена автором, яка дає змогу в реальному часі спостерігати за розвитком процесу коливального руху змодельованої системи шляхом обчислення і побудови у вікні програми поточних форм вигину стрижнів при коливанні. Наведені результати дослідження коливального руху стрижня, що моделює роботу бурильної колони при обертанні, у вигляді можливих форм вигину, у різні моменти часу, після виведення його зі стану рівноваги. Відмічено, що дія зосередженої на нижньому кінці вагового стрижня сили, що стискує, призводить до збільшення амплітуди вигину стрижня в його нижній частині, внаслідок чого починає відбуватись закручування стрижня по спіралі. Такий ефект обумовлюється дією гіроскопічних моментів, які виникають саме внаслідок збільшення вигину стрижня в нижній частині, що призводить до збільшення кутів оберту перетину, швидкість зміни яких і є складовими гіроскопічного моменту. На наведеному прикладі дослідження показано, що розглянута методика та реалізоване на її основі програмне забезпечення дає змогу здійснювати дослідження динаміки руху об'єктів, які моделюються стрижнями значної довжини.*

**Ключові слова:** апроксимація; чисельне диференціювання; складні форми вигину; сплайн; геометрична нелінійність; гіроскопічний ефект

**Вступ**

Задачі напружено-деформованого стану та коливань систем пружних стрижнів, валів, роторів, що обертаються, виникають при проектуванні елементів конструкцій машин і приладів. Вали, ротори, що обертаються, є відповідальними елементами двигунів, турбін, вітро- та гідроенергетичних установок, бурильних колон та інших конструкцій.

Для елементів конструкцій, що обертаються, загальним є те, що причиною розвитку коливань може стати періодична зміна за часом як гіроскопічних (коріолісових) сил інерції, так і інших параметрів системи.

Наприклад, вал, перетин якого має нерівні головні жорсткості, може зазнавати інтенсивні поперечні коливання навіть у тому випадку, коли він повністю зрівноважений, або його вісь паралельна вектору прискорення сил тяжіння. Безпосередньою причиною збудження коливань в цьому випадку є

періодична зміна жорсткості у часі. У випадках складного руху сили інерції, що викликані поворотом осі обертання конструкції, виводять її з площини обертання та призводять до прецесійних коливань. При цьому змінюється значення резонансних частот, порушуються умови автобалансування, виникають явища коливальної нестійкості.

Причиною розвитку коливального руху також можуть стати періодичні зовнішні навантаження, а саме-періодичні поздовжні навантаження.

Наприклад, при роботі бурильної колони періодичним може стати вплив реакції забою внаслідок її поперечних коливань, за яких здійснюються поздовжні переміщення її рухомого кінця. При роботі промислового перфоратора періодичною є дія ударника перфоратора на хвостовик стрижня свердла або бура. Під час руху суден періодичним може стати навантаження на валопровід з боку гвинта при проходженні зон турбулентності. Також у валопроводах періодичним

може бути вплив від коливального руху сусідньої ділянки, який передається через з'єднувальну муфту завдяки поздовжнім переміщенням.

Поведінка пружних систем, що обертаються, які складаються з валів, стрижнів, роторів, описується складними системами диференційних рівнянь з частинними похідними з урахуванням гіроскопічних сил, які обумовлюються переносними, відносними та коріолісовими прискореннями. Мала жорсткість, велика довжина, порівняно високі значення параметрів інтенсивності збуджень, за яких експлуатуються елементи конструкцій, що розглядаються, приводять до необхідності врахувати в рівняннях нелінійність, до аналізу коливального руху в межах критичних та закритичних швидкостей обертання, визначенню спектру частот власних коливань та критичних швидкостей обертання з урахуванням гіроскопічної дії, а також аналізу стійкості при дослідженні різних режимів руху.

### Мета статті

Мета – висвітлити методику чисельного диференціювання складних форм вигину стрижнів за допомогою поліноміальних сплайн-функцій та продемонструвати результати її застосування у комп'ютерній програмі на прикладі дослідження коливального руху бурильної колони при обертанні.

### Виклад основного матеріалу

#### Постановка задачі

При здійсненні коливального руху при обертанні стрижнів, валів значної довжини, а також при дії зовнішніх періодичних навантажень можливі різноманітні форми вигину, які змінюються в часі, наприклад такі, що зображені на рис. 1.

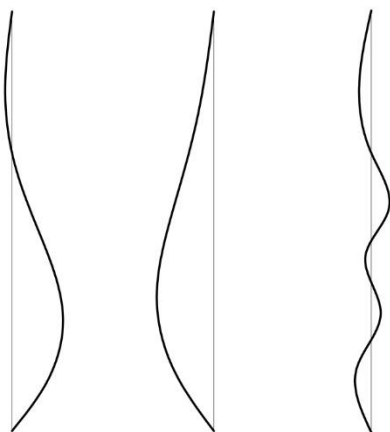


Рисунок 1 – Форми вигину стрижнів, що обертаються, при коливальному русі

У зв'язку з цим дослідження динаміки коливального руху з представленням форм вигину стрижнів у вигляді заданих функцій, якими можна описати певний вигин стрижня по всій його довжині, є недоцільним. У таких випадках при дослідженні

динаміки коливального руху доцільним є апроксимація у кожний момент часу  $t$  лінії поточної форми вигину з пошуком функцій, які найбільш точно її описують.

Одним із таких підходів є апроксимація поліномом, де в загальному випадку поточна форма вигину може бути представлена поліномом  $k$ -го порядку, який легко диференціюється і отримані похідні використовуються у розв'язанні диференційних рівнянь коливального руху. Однак цим можна обмежитись у випадках зі стрижнями малої довжини, для яких однієї поліноміальної функції 6-го порядку може бути достатньо для описання форми вигину. Для стрижнів значної довжини, наприклад, якими моделюються бурильні колони для найбільш точного описання форми їх вигину при коливаннях, цього не достатньо, оскільки отримана функція може давати значну похибку, що є неприпустимим. У таких випадках доцільно розглядати лінію вигину як сплайн, розбитий на певну кількість сплайн-функцій [1; 6].

У загальному уявленні кожна сплайн-функція відповідає за певну ділянку, а неперервність та гладкість сплайну забезпечується умовою рівності другої похідної в точках перетину сплайн-функцій. При цьому третя та четверта похідна може зазнавати розривів у точках з'єднання сплайн-функцій [1], що не є припустимим для розв'язку рівнянь коливального руху. Сплайн має бути таким, щоб функція його четвертої похідної була неперервною та гладкою лінією протягом всієї довжини стрижня. Це є необхідною умовою для розв'язку рівнянь коливального руху [9], які з урахуванням геометричної нелінійності [3] та сил власної ваги для вертикальних стрижнів [10] мають вигляд:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{EI_1(x)}{\rho_1} \right) - \bar{m}r^2 \left( \frac{d^4 y}{dt^2 dx^2} + \omega^2 \frac{d^2 y}{dx^2} \right) - 2\omega \bar{m} \frac{dz}{dt} - \\ - \bar{m}\omega^2 y + \bar{m} \frac{d^2 y}{dt^2} + P(t) \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{dx} \left( \bar{m}g(l-x) \frac{dy}{dx} \right) = 0 \\ \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{EI_2(x)}{\rho_2} \right) - \bar{m}r^2 \left( \frac{d^4 z}{dt^2 dx^2} + \omega^2 \frac{d^2 z}{dx^2} \right) + 2\omega \bar{m} \frac{dy}{dt} - \\ - \bar{m}\omega^2 z + \bar{m} \frac{d^2 z}{dt^2} + P(t) \frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{1}{dx} \left( \bar{m}g(l-x) \frac{dz}{dx} \right) = 0, \end{cases}$$

де  $E$  – модуль пружності матеріалу стрижня;  $I_1, I_2$  – моменти інерції перетину стрижня у взаємно перпендикулярних площинах;  $r$  – радіус інерції перетину стрижня;  $\bar{m}$  – маса одиниці довжини стрижня;  $\omega$  – швидкість обертання стрижня навколо осі, що збігається з його віссю у недеформованому стані;  $P(t)$  – зовнішнє періодичне поздовжнє навантаження;  $1/\rho_1, 1/\rho_2$  – головні кривини осі стрижня у взаємно перпендикулярних площинах.

**Методика дослідження**

Якщо розглянути сплайн у тому уявленні, коли кожній точці вигнутої лінії відповідає власна функція, для якої існує четверта похідна, та її гілки є дотичними до сусідніх точок, як мінімум двох з одного боку та двох з іншого від поточної, в такій реалізації функція четвертої похідної сплайну буде неперервною та гладкою лінією.

Кожна така функція шукається апроксимацією значень у точках, через які проходить її лінія. Знайдені функції диференціюються та отримані похідні використовуються в розв'язанні системи диференціальних рівнянь для кожної точки стрижня окремо, з метою обчислення наступної форми вигину в момент часу  $t + \Delta t$ .

Розглянемо поточну форму вигину стрижня довжиною  $l$  у деякий момент часу  $t$ . Для кожної точки  $n$  стрижня (рис. 2) по 5-ти значенням  $y_{n-6}, y_{n-3}, y_n, y_{n+3}, y_{n+6}$  для  $x_{n-6}, x_{n-3}, x_n, x_{n+3}, x_{n+6}$  в точках  $n-6, n-3, n, n+3, n+6$  здійснимо апроксимацію лінії вигину поліноміальними функціями 4-го порядку

$$f_n(x) = a_{n0} + a_{n1}x + a_{n2}x^2 + a_{n3}x^3 + a_{n4}x^4.$$

Для визначення коефіцієнтів  $a_{n0}, a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, a_{n4}$  кожної функції необхідно розв'язати систему з 5-ти лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{n0} + a_{n1}x_{n-6}^1 + a_{n2}x_{n-6}^2 + a_{n3}x_{n-6}^3 + a_{n4}x_{n-6}^4 = y_{n-6} \\ a_{n0} + a_{n1}x_{n-3}^1 + a_{n2}x_{n-3}^2 + a_{n3}x_{n-3}^3 + a_{n4}x_{n-3}^4 = y_{n-3} \\ a_{n0} + a_{n1}x_n^1 + a_{n2}x_n^2 + a_{n3}x_n^3 + a_{n4}x_n^4 = y_n \\ a_{n0} + a_{n1}x_{n+3}^1 + a_{n2}x_{n+3}^2 + a_{n3}x_{n+3}^3 + a_{n4}x_{n+3}^4 = y_{n+3} \\ a_{n0} + a_{n1}x_{n+6}^1 + a_{n2}x_{n+6}^2 + a_{n3}x_{n+6}^3 + a_{n4}x_{n+6}^4 = y_{n+6} \end{cases}$$

Таким чином поточна форма вигину після апроксимації буде описана масивом з  $n$  функцій  $f_n(x)$ , кожна з яких відповідає певній точці лінії.

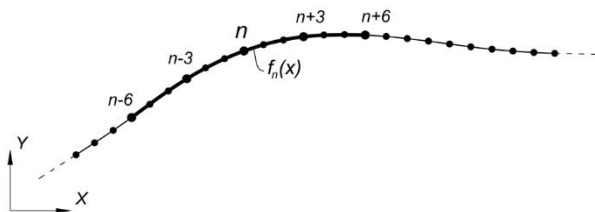


Рисунок 2 – Апроксимація форми вигину для точки  $n$  у функцію  $f_n(x)$

Оскільки для розв'язання рівнянь коливального руху необхідно мати перші чотири похідні, для кожної точки необхідно та достатньо мати поліноміальну функцію 4-го порядку, так як існує її четверта похідна. Для її визначення необхідно та достатньо мати значення в 5-ти точках (рис. 2).

Пошук функцій  $f_n(x)$  в загальному випадку можна здійснювати за сусідніми точками  $n-2, n-1,$

$n+1, n+2$  від поточної  $n$ , але нам необхідно, щоб функції всіх похідних сплайну були неперервними гладкими лініями. Тому ці точки вважаються проміжними і використовуються для контролю неперервності та гладкості, а апроксимація здійснюється по значеннях в точках  $n-6, n-3, n+3, n+6$  та поточній  $n$ , які вважаються характерними.

Контроль неперервності та гладкості лінії здійснюється кожен раз перед апроксимацією поточної форми вигину. Якщо в результаті контролю підтверджується, що проміжні точки перебувають на одній лінії з характерними, це означає, що функції залежності всіх існуючих похідних по довжині будуть являти собою гладкі неперервні лінії протягом всієї довжини стрижня.

Ключовим аспектом при розв'язанні задач, пов'язаних зі стрижневими системами, є розв'язок задачі на кінцях стрижня. При використанні методу, що розглядається, умови на кінцях моделюються умовним продовженням лінії вигину. Так, наприклад, шарнірно-нерухоме закріплення на початку стрижня моделюється умовою, що для апроксимації і пошуку функції в точці 0 використовуються значення  $x_0=0, y_0=0$ , та умовно вважається, що при  $x_{-1}=-x_1, x_{-2}=-x_2$ , значення  $y_{-1}=-y_1, y_{-2}=-y_2$ , відповідно. Тут точки  $-1, -2$  належать умовному продовженню лінії вигину, а їх координати визначаються відповідним співвідношенням по координатах в точках 1 і 2. Таке співвідношення (умова) гарантує, що кожного разу в результаті апроксимації значення  $y_0 \rightarrow 0$ . Шарнірно-нерухоме або шарнірно-нерухоме закріплення на кінці стрижня моделюється аналогічною умовою тільки для кінцевої точки. Отже, для пошуку функції в точці  $m$  використовуються значення  $y_m=0$ , та умовно вважається, що при  $x_{m+1}=2x_m-x_{m-1}, x_{m+2}=2x_m-x_{m-2}$ , значення  $y_{m+1}=-y_{m-1}, y_{m+2}=-y_{m-2}$ .

Аналіз геометричного положення стрижня у просторі, апроксимація форми вигину та її диференціювання є першою складовою процесу розв'язання рівнянь коливального руху і здійснюється в умовно фіксований момент часу.

Колівальний рух, особливо при обертанні, є динамічним процесом, за якого у кожний наступний момент часу змінюється не тільки геометричне положення всіх точок системи, а також постійно змінюються такі параметри, як кути оберту, швидкості та прискорення, тому другою складовою розв'язання рівнянь є розв'язання задачі у часі. Воно здійснюється з використанням чисельного метода інтегрування за часом Хубболта, де на основі отриманої поточної форми вигину та її похідних здійснюється пошук нової форми вигину в новий момент часу  $t + \Delta t$ .

### Реалізація методики та результати

Розглянута методика є базовою складовою алгоритму чисельного розв'язання рівнянь коливального руху стрижневих систем у просторі і часі. Реалізація алгоритму здійснена у комп'ютерній програмі з графічним інтерфейсом, яка дає змогу в реальному часі спостерігати за розвитком динаміки коливального руху змодельованої системи шляхом обчислення і побудови у вікні програми поточних форм вигину стрижнів при коливанні. Крім цього, програма допомагає аналізувати поведінку змодельованої системи, виявляти області динамічної нестійкості, будувати діаграми цих областей.

Використовуючи зазначену програму, здійснено дослідження динаміки ряду об'єктів, робочі органи яких моделюються довгомірними гнучкими стрижнями.

На рис. 3 наведені форми вигину бурильної колони довжиною  $l=1000$  м, діаметром  $D_{\text{зов}}=0,168$  м,  $d_{\text{вн}}=0,148$  м, що обертається зі швидкістю  $\omega=0,2$  с<sup>-1</sup>, у різні моменти часу, після виведення її зі стану рівноваги. На нижній кінець колони діє сила  $P=0,04 \cdot Q_{\text{в.в}}=15,3$  кН, що моделює опір забою свердловини.

Проведені таким чином спостереження за коливальним рухом комп'ютерної моделі після виведення її зі стану рівноваги показують, що вигин таких довгих стрижнів, якими моделюються бурильні колони, в процесі коливання при обертанні набуває таких форм, де амплітуда вигину нижньої частини має набагато більші величини, ніж інших ділянок.

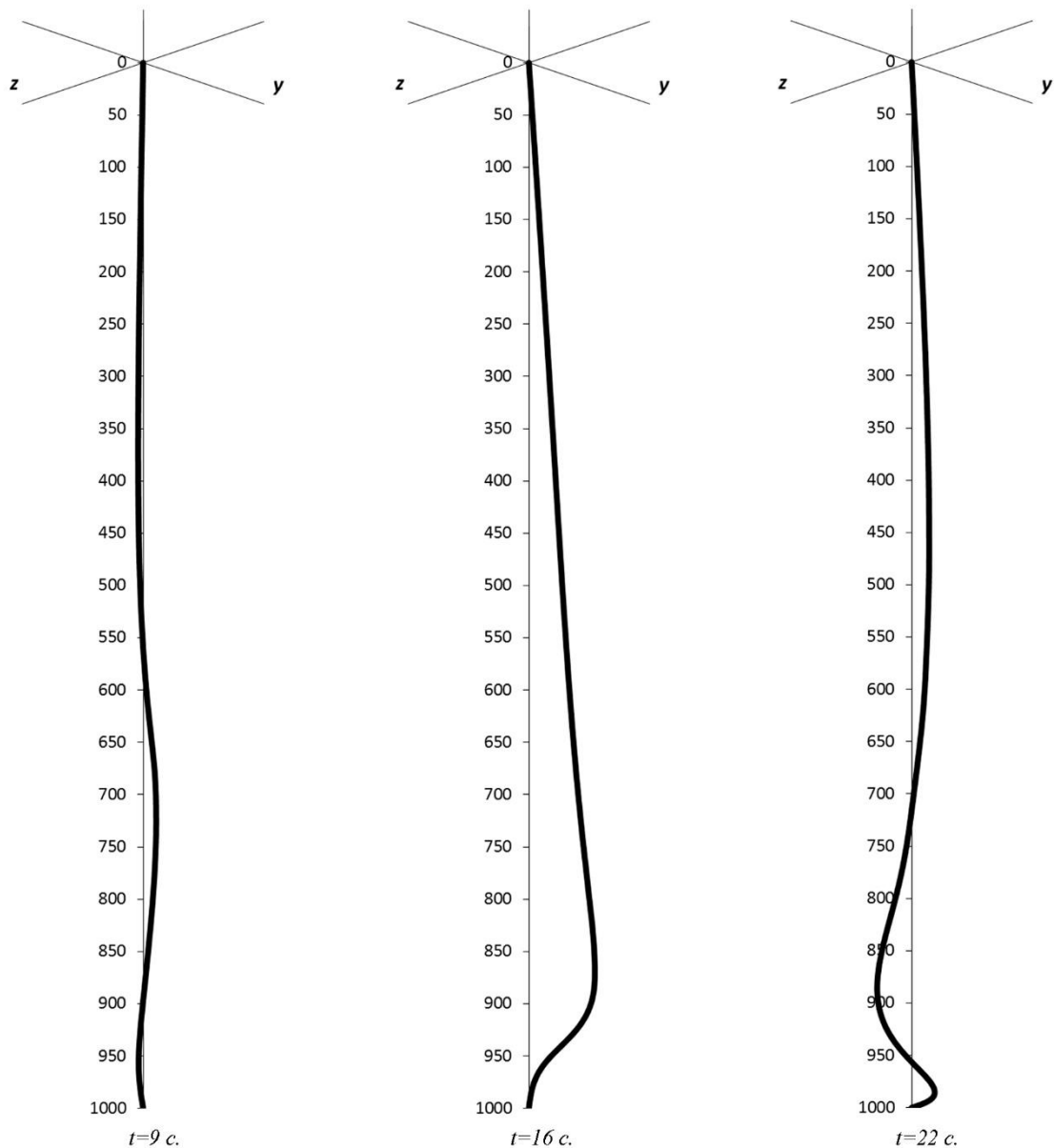


Рисунок 3 – Форми вигину бурильної колони довжиною  $l=1000$  м після виходу зі стану рівноваги, при швидкості обертання  $\omega=0,2$  с<sup>-1</sup>, в різні моменти часу

За наявності зосередженої поздовжньої сили, що стискує, вигин нижньої частини стрижня в процесі коливання спочатку збільшується, а через деякий час в нижній частині стрижня починає відбуватись його закручування по спіралі. Такий ефект обумовлюється дією гіроскопічних моментів, які виникають саме внаслідок збільшення вигину в нижній частині, до якого призводить дія зосередженої поздовжньої сили на кінці, оскільки збільшення вигину приводить до збільшення кутів оберту перетину стрижня, швидкість зміни яких і є складовими гіроскопічного моменту.

### Висновок

Розглянута методика чисельного диференціювання складних форм вигину стрижнів при обертанні, що розроблена та реалізована автором в комп'ютерній програмі, дає змогу здійснювати дослідження динаміки руху об'єктів, які моделюються стрижнями значної довжини. Як показують продемонстровані в статті результати, в такий спосіб можна виявляти характерні моменти часу, за яких може змінюватись поведінка змодельованої системи при здійсненні коливального руху, та здійснювати спостереження за її розвитком.

### Список літератури

1. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолл Дж. *Теория сплайнов и ее применение*. – М.: Мир, 1972.
2. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. *Численные методы*. – М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2015. – 639 с.
3. Болотин В. В. *Динамическая устойчивость упругих систем*. – М., изд-во технико-теоретической литературы, 1956. – 600 с.
4. Гуляев В. И., Гайдайчук В. В., Худолий С. Н. *Компьютерное моделирование динамики конструкций установок глубокого бурения* // *Збірник наукових праць Українського науково-дослідного та проектного інституту сталевих конструкцій імені В. М. Шимановського*. – 2009. – Вип. 4. – С. 208 – 216.
5. Гром А. А., Недін В. О. *Стійкість бурильних колон, що обертаються* // *Опір матеріалів і теорія споруд*. – К.: Будівельник. – Вип. 69, – 2001. – С. 155-158.
6. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. *Методы сплайн-функций*. – М.: «Наука», 1980. – 352 с.
7. Недін В. О. *Комп'ютерне моделювання процесу коливального руху пружних стрижнів, що обертаються* // *Сучасні методи і проблемно-орієнтовані комплекси розрахунку конструкцій їх застосування у проектуванні і навчальному процесі: Тези доповідей другої міжнародної науково-практичної конференції, м. Київ, 26-27 вересня 2018*. – С. 76-78. ISBN 978-617-7031-73-3.
8. Недін В. О. *Стійкість бурильних колон, що обертаються, з урахуванням дії гіроскопічних сил* // *Опір матеріалів і теорія споруд*. – К.: Будівельник. – Вип. 67, – 2000. – С. 163 – 167.
9. Тондл А. *Динамика роторов турбогенераторов*. – Л., Энергия, 1971. – 297 с.
10. Сароян А. Е. *Теория и практика работы бурильной колонны*. – М.: Недра, 1990. – 263 с.
11. Maurice Petyt. *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*. Cambridge University Press, 1990. – 558 p.
12. Yimin Wei, Zhiwei Zhao, Wenhua Chen and Qi Liu. *Influence of Axial Loads to Propagation Characteristics of the Elastic Wave in a Non-Uniform Shaft* // *Chinese Journal of Mechanical Engineering*. – 2019 – No. 32:70, – P. 13 – 26, doi:10.1186/s10033-019-0385-z.

Стаття надійшла до редколегії 28.08.2020

### Nedin Valentyn

Assistant of professor, Department of Computer Sciences, [orcid.org/0000-0003-3138-2892](https://orcid.org/0000-0003-3138-2892)  
Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

### NUMERICAL DIFFERENTIATION OF COMPLEX BEND FORMS OF LONG ROTATING RODS

**Abstract.** The technique of numerical differentiation of the complex bend forms of long rotating rods is presented. This technique is based on search for new bend forms of the rotating rod by solving the equations of oscillations with using the Houbolt time integration method and the polynomial functions (splines) that are described the current bend form. In it, the spline functions are found by current bend form approximation where each of the found functions is responsible to certain point of rod elastic line and describes the position of nearby points. Described technique was realized in a computer program with graphic user interface that is developed by author. Program allows to monitor for dynamics of the oscillatory motion of the modeled system in real-time by calculating and drawing the current band forms of the rotating rod during the oscillation. The results of investigation of the oscillations of long rotating rod are shown. This rod is modeling the drill string operation. Results are shown by possible bend forms at different moments of time after system had been out of equilibrium. It is noted that the action of an axial compressive force that is pointed to the lower end of the vertical heavy rod leads to the effect of twisting to a spiral of its lower part. This effect arises

via action of gyroscopic moments, which begin to appear when the lower part of the rod starts to bend and this bending have been growing. It happens because the growth of bending leads to increase the angles of rod cross-sections' turn, the velocity of change of which is part of the gyroscopic moment. The displayed instance shows, that the considered technique and developed on its basis software allows to investigate the dynamics of the objects which are modeled by heavy long rods.

**Keywords:** *approximation; numerical differentiation; complex bend forms; spline; geometric nonlinearity; gyroscopic effect*

#### References

1. Ahlberg, J., Nilson, E., Walsh, J. (1972). *Spline theory and its application*. Moscow: Peace, 319. [In Russian]
2. Bakhvalov, N.S., Judkov, N.P., Kobelkov, G.M. (2015). *Numerical methods*. Moscow: BINOM, Laboratory of Knowledge, 639. [In Russian]
3. Bolotin, V.V. (1956). *The dynamic stability of elastic systems*. Moscow: Technical and Theoretical Literature Press, 600. [In Russian]
4. Gulyayev, V.I., Gaydaychuk, V.V., Xudolij, S.N. (2009). *Computer modeling of dynamics of deep drilling rigs' constructions*. Scientific Works Journal of the Ukrainian Research Institute of Steel Structures named after V.M. Szymanowski, 4, 208 – 216 [In Russian].
5. Grom, A.A., Nedin, V.O. (2001). *Stability of rotating drill strings*. Strength of Materials and Theory of Structures, 68, 155 – 158. [In Ukrainian]
6. Zavyalov, Y.S., Kvasov, B.I., Miroschnichenko, V.L. (1980). *Spline functions methods*. Moscow: Science, 352. [In Russian]
7. Nedin, V.O. (2018). *Computer modeling of the oscillation's process of rotating elastic rods*. Modern methods and problem-oriented complexes for structures calculating and their application in design and educational process, 2, 76 – 78. [In Ukrainian]
8. Nedin, V.O. (2000). *Stability of rotating drill strings with action of gyroscopic forces*. Strength of Materials and Theory of Structures, 67, 163 – 167. [In Ukrainian]
9. Tondl, A. (1971). *The rotor dynamics of turbines*. Leningrad: Energy, 297. [In Russian]
10. Saroyan, A.E. (1990). *Theory and practice of drill string operation*. Moscow: Nedra, 263. [In Russian]
11. Maurice, Petyt. (1990). *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*. Cambridge University Press, 558.
12. Yimin, Wei, Zhiwei, Zhao, Wenhua, Chen & Qi, Liu. (2019). *Influence of Axial Loads to Propagation Characteristics of the Elastic Wave in a Non-Uniform Shaft*. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 32, 70, 13–26, doi: 10.1186/s10033-019-0385-z.

#### Посилання на публікацію

APA Nedin, Valentyn. (2020). *Numerical differentiation of complex bend forms of long rotating rods*. Management of Development of Complex Systems, 43, 110 – 115, dx.doi.org\10.32347/2412-9933.2020.43.110-115.

ДСТУ Недін В. О. Чисельне диференціювання складних форм вигину стрижнів значної довжини при обертанні [Текст] / В. О. Недін // Управління розвитком складних систем. – 2020. – № 43. – С. 110 – 115. dx.doi.org\10.32347/2412-9933.2020.43.110-115.