

DOI: 10.32347/2412-9933.2021.46.55-62

УДК 539.3

Іванченко Григорій Михайлович

Доктор технічних наук, професор, професор кафедри будівельної механіки, orcid.org/0000-0003-1172-2845
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

Максим'юк Юрій Всеволодович

Доктор технічних наук, професор, професор кафедри будівельної механіки, orcid.org/0000-0002-5814-6227
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

Козак Андрій Анатолійович

Кандидат технічних наук, доцент кафедри будівельної механіки, orcid.org/0000-0002-3192-1430
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

Мартинюк Іван Юрійович

Кандидат технічних наук, докторант кафедри будівельної механіки, orcid.org/0000-0001-7957-2068
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НАПІВНАЛІТИЧНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ПРИЗМАТИЧНИХ ТІЛ СКЛАДНОЇ ФОРМИ

***Анотація.** В роботі на основі моментної схеми скінченних елементів і напіваналітичного варіанта методу скінченних елементів представлено ефективний чисельний підхід до дослідження довільно навантажених масивних і тонкостінних призматичних тіл складної форми, деформування яких може проходити за межею пружності матеріалу. Наведено рівняння напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ) з використанням для розкладання переміщень рядів Фур'є. Наведено основні співвідношення просторової задачі теорії пружності в криволінійній системі координат і теорії пластичної течії для ізотропно зміцнюваного матеріалу за умови текучості Мізеса. Відповідно до методики моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) отримано вирази деформацій призматичного скінченного елемента через вузлові значення амплітудних переміщень. Виведено формули для обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості скінченного елемента (СЕ) зі змінними і усередненими в площині поперечного перерізу механічними і геометричними параметрами.*

***Ключові слова:** метод скінченних елементів; напіваналітичний метод скінченних елементів; момент на схема скінченних елементів; призматичні тіла складної форми; універсальний скінченний елемент; теорія пружності; теорія пластичної течії; матриця жорсткості*

Вступ

Найбільш широкого застосування в рамках напіваналітичного методу скінченних елементів в якості системи координатних функцій набули тригонометричні ряди [3]. У цьому випадку розв'язання вихідної просторової крайової задачі вдається звести до розв'язання ряду двовимірних задач для кожної утримуваної гармоніки і тим самим скоротити на кілька порядків обсяг обчислень у порівнянні з традиційним варіантом МСЕ. У цій роботі розв'язувальні співвідношення напіваналітичного методу скінченних елементів з використанням рядів Фур'є виконуються на основі широко апробованої і високоефективної методики моментної схеми скінченних елементів [1; 2; 8; 9].

Основні співвідношення теорії пружності і пластичності в криволінійній системі координат викладено в роботах [5 – 7]. Розглянемо в декартовій

системі координат Z^i , яку в подальшому будемо називати базисною, довільно навантажене призматичне тіло (рис. 1), утворене рухом нормальної Z^3 площини складної форми. Відмінною особливістю таких тіл є довільний характер розподілу механічних і геометричних параметрів у поперечному перерізі і їх сталість у напрямку Z^3 . Базова система координат призначена для задавання граничних умов, зовнішніх впливів, механічних і геометричних характеристик об'єкта. Опис напружено-деформованого стану тіла складної форми зручніше проводити в місцевій системі координат, зазвичай пов'язаної з його геометрією. З цією метою введемо в розгляд місцеву криволінійну схему координат X^I , осі X^1 і X^2 які розташовані в площині $Z^3 = const$, а X^3 збігається за напрямком з Z^3 .

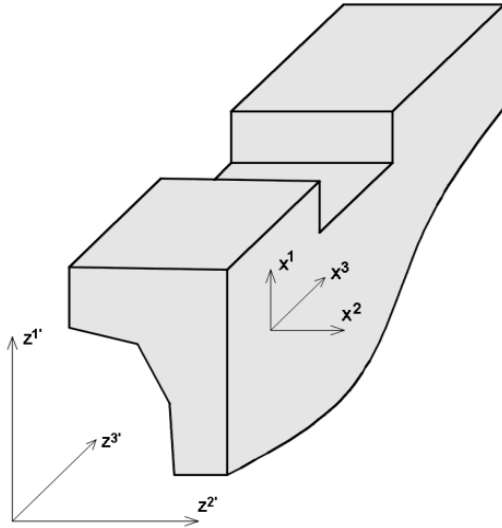


Рис. 1

Нехай в будь-якій точці тіла зв'язок між базисною декартовою системою координат Z^i і місцевою криволінійною X^I визначається тензором перетворення $Z_{,I}^i$, компоненти якого дорівнюють:

$$Z_{,\beta}^{\alpha} = \frac{\partial Z^{\alpha}}{\partial X^{\beta}}, \quad Z_{,3}^{\beta} = \frac{\partial Z^{\beta}}{\partial X^3}, \quad Z_{,\alpha}^{\beta} = Z_{,3}^{\beta} = 0. \quad (1)$$

Тут і надалі індекси, позначені грецькими буквами, приймають значення 1, 2; латинськими – 1, 2, 3. За індексами, що розташовані в дужках, підсумовування не проводиться.

Тоді коваріантні компоненти метричного тензора місцевої системи координат можна представити через коваріантні компоненти базисної системи:

$$q_{\alpha\beta} = q_{\gamma\mu} Z_{,\alpha}^{\gamma} Z_{,\beta}^{\mu}, \quad q_{33} = q_{33} Z_{,3}^{\beta} Z_{,3}^{\beta}. \quad (2)$$

Беручи до уваги, що в декартовій системі координат

$$q_{i(i)} = 1, \quad q_{\gamma\mu} = 0, \quad (\gamma \neq \mu) \quad (3)$$

вираз (2) можна спростити:

$$q_{\alpha\beta} = Z_{,\alpha}^{\gamma} Z_{,\beta}^{\gamma}, \quad q_{33} = Z_{,3}^{\beta} Z_{,3}^{\beta}. \quad (4)$$

Контрваріантні компоненти метричного тензора виражаються через коваріантні за формулою:

$$q^{\alpha\beta} = \frac{A(q_{\alpha\beta})}{q}, \quad q^{33} = \frac{1}{q_{33}}, \quad (5)$$

де $A(q_{\alpha\beta})$ – алгебраїчне доповнення до елемента $(q_{\alpha\beta})$ матриці, складеної з коваріантних компонент метричного тензора; q – визначник цієї матриці.

Компоненти тензора деформацій в місцевій системі координат визначаються співвідношенням

$$E_{iI} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X^I} + \frac{\partial U_I}{\partial X^i} \right) - U_k \Gamma_{iI}^k, \quad (6)$$

де Γ_{iI}^k – символи Крістофеля другого роду; U_I – переміщення в місцевій системі координат.

Виразимо переміщення і символи Крістофеля їх значеннями в базисній системі координат:

$$U_k = U_s Z_{,k}^s \quad (7)$$

$$\Gamma_{iI}^k = X_{,\ell}^k Z_{,i}^m Z_{,I}^n \Gamma_{min}^{\ell}$$

$$\Gamma_{min}^{\ell} + X_{,\ell}^k Z_{,i}^m \frac{\partial Z_{,I}^{\ell}}{\partial Z^m}, \quad (8)$$

$$\text{де } X_{,\ell}^k = \frac{\partial X^k}{\partial Z^{\ell}}, \quad z_{,k}^s \cdot x_{,e}^k = \delta_{,e}^s.$$

Після підстановки (7) і (8) в (6) і приведення подібних отримуємо:

$$E_{iI} = \frac{1}{2} (U_{s,i} Z_{,I}^s + U_{s,I} Z_{,i}^s) - U_s Z_{,i}^m Z_{,I}^n \Gamma_{min}^s. \quad (9)$$

Оскільки в декартовій системі координат всі символи Крістофеля дорівнюють нулю, вираз (9) можна переписати у вигляді:

$$E_{iI} = \frac{1}{2} (U_{s,i} Z_{,I}^s + U_{s,I} Z_{,i}^s). \quad (10)$$

Зв'язок між компонентами тензора напружень і тензора деформацій прийнято відповідно до узагальнених законом Гука:

$$\sigma^{iI} = C^{iIk\ell} E_{k\ell}, \quad (11)$$

де $C^{iIk\ell}$ – компоненти тензора пружних постійних.

Для ізотропного тіла компоненти тензора пружних постійних визначаються через коефіцієнти Ляме:

$$C^{iIk\ell} = \lambda g^{iI} g^{k\ell} + \mu (g^{I\ell} g^{ik} + g^{i\ell} g^{Ik}), \quad (12)$$

які легко обчислити, знаючи модуль пружності матеріалу і коефіцієнт Пуассона:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (13)$$

При описі пластичного деформування використовуються співвідношення теорії пластичної течії для ізотропно зміцнюваного матеріалу [4]:

1. Повне збільшення деформацій dE_{iI}

дорівнюють сумі пружних dE_{iI}^e і пластичних dE_{iI}^p складових

$$dE_{iI} = dE_{iI}^e + dE_{iI}^p. \quad (14)$$

2. Матеріал пластично нестисливий і зміна його об'єму лінійно-пружна. У початковому стані матеріал є ізотропним і однорідним:

$$dE_{i(i)}^p = 0, \quad dE_{i(i)} = dE_{i(i)}^e. \quad (15)$$

3. Пружні деформації пов'язані з напругою законом Гука (11).

4. Область пружних деформацій обмежена поверхнею плинності, рівняння якої у просторі напружень за умови текучості Мізеса має вигляд:

$$f = \frac{1}{2} S_{ii} S^{ii} - \tau_s^2 = 0, \quad (16)$$

де τ_s – межа плинності при чистому зсуві, що залежить від параметра зміцнення Одквіста χ :

$$\tau_s = \tau_s(\chi), \quad \chi = \int \sqrt{\frac{2}{3} dE_{ii}^p dE_{ii}^p}. \quad (17)$$

5. Згідно з асоційованим законом зв'язок між девіатором напруг і збільшенням пластичних деформацій визначається співвідношенням:

$$dE_{ii}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial S_{ii}} = d\lambda S_{ii}, \quad (18)$$

де S_{ii} – девіатор тензора напружень:

$$S_{ii} = \sigma_{ii} - \frac{1}{3} \delta_{ii} \partial_{ii}. \quad (19)$$

Виведення формул для обчислення вузлових реакцій і коефіцієнтів матриці жорсткості скінченного елемента зі змінними механічними і геометричними параметрами.

Для апроксимації розглянутого класу об'єктів скористаємося призматичним скінченим елементом з поперечним перерізом у вигляді чотирикутника довільного обрису (рис. 2). Помістимо в центр елемента початок системи координат X^i , спрямовуючи осі X^1 і X^2 вздовж сторін чотирикутника, а X^3 – по нормальній до них. Будемо вважати, що область, яку займає елемент, відображена в місцевій системі координат на паралелепіпед з одиничними розмірами поперечного перерізу і довжиною, що дорівнює двом. На характер розподілу по площі поперечного перерізу цього СЕ механічних і геометричних параметрів ніяких обмежень не вводиться, і вони визначаються в певній кількості точок інтегрування, розташованих у площині $X^3 = const$ (рис. 3). Там же визначаються компоненти тензора напружень, які, крім того, обчислюються в точках інтегрування по X^3 (рис. 4).

Виразимо за напрямком X^3 переміщення відрізками рядів Фур'є:

$$U_{\alpha'} = \sum_{\ell=1}^L U_{\alpha'}^{\ell} \sin \frac{\ell \pi}{2} (X^3 + 1);$$

$$U_{3'} = \sum_{\ell=1}^L U_{3'}^{\ell} \cos \frac{\ell \pi}{2} (X^3 + 1), \quad (20)$$

і прийемо білінійний закон їх розподілу в площині поперечного перерізу елемента:

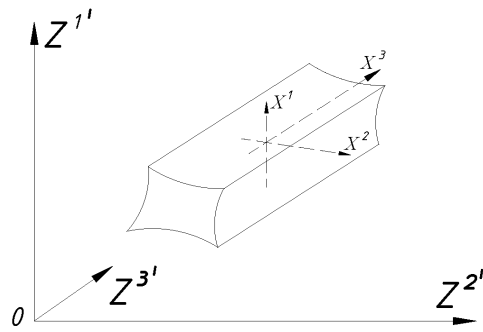


Рис. 2

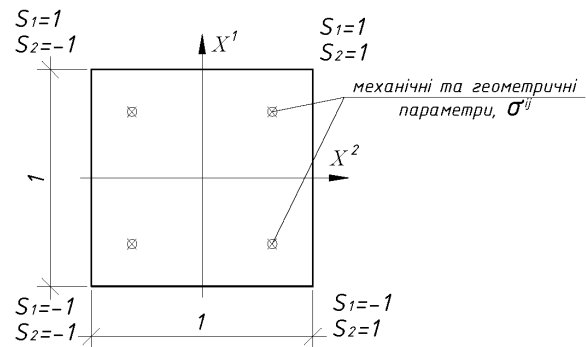


Рис. 3

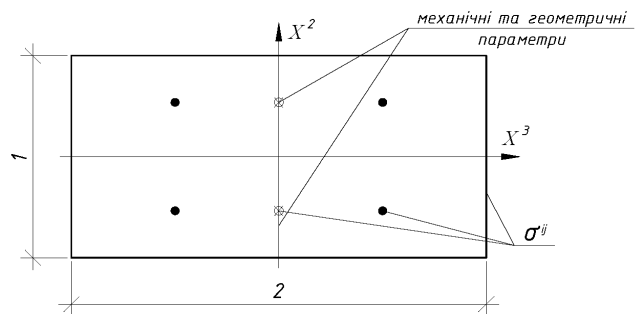


Рис. 4

$$U_n = \sum_{s_1=1} \sum_{s_2=1} U_{n(s_1, s_2)} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} S_1 X^1 + \frac{1}{2} S_2 X^2 + S_1 S_2 X^1 X^2 \right), \quad (21)$$

де $U_{n(s_1, s_2)}$ – вузлові значення переміщень, представлених компонентами в базисній системі координат Z^n ; S_1 і S_2 – подвосні координати вузлів уздовж осей X_1 і X_2 , що визначають їх положення в місцевій системі координат.

Для прийнятого закону розподілу переміщень відповідно до методики моментної схеми скінчених елементів [10] представимо деформації відрізками ряду маклорена:

$$\epsilon_{\alpha(\alpha)} = \epsilon_{\alpha(\alpha)}^0 + \epsilon_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)}^0 X^{(3-\alpha)}, \quad \epsilon_{12} = \epsilon_{12}^0,$$

$$\epsilon_{\alpha 3} = \epsilon_{\alpha 3}^0 + \epsilon_{\alpha 3, (3-\alpha)}^0 X^{(3-\alpha)}, \quad (22)$$

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}^0 + \varepsilon_{33,\alpha}^0 X^\alpha,$$

де ε_{il}^0 і ε_{il}^0 – коефіцієнти розкладання деформацій в ряд Маклорена, які обчислюють за формулами:

$$\varepsilon_{il}^0 = \varepsilon_{il} \Big|_{x^\alpha=0},$$

$$\varepsilon_{il,\alpha}^0 = \frac{\partial \varepsilon_{il}}{\partial X^\alpha} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad (\alpha \neq i, I), \quad (23)$$

$$\varepsilon_{\alpha(\alpha)} = Z_{,\alpha}^{\gamma} U_{\gamma,\alpha}^0 + \left(Z_{,12}^{\gamma} U_{\gamma,\alpha}^0 + Z_{,\alpha}^{\gamma} U_{\gamma,12}^0 \right) X^{(3-\alpha)},$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(Z_{,1}^{\gamma} U_{\gamma,2}^0 + Z_{,2}^{\gamma} U_{\gamma,1}^0 \right), \quad (24)$$

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \left[Z_{,\alpha}^{\gamma} U_{\gamma,3}^0 + Z_{,3}^{\gamma} U_{\gamma,\alpha}^0 + \left(Z_{,12}^{\gamma} U_{\gamma,3}^0 + Z_{,\alpha}^{\gamma} U_{\gamma,3(3-\alpha)}^0 + Z_{,3}^{\gamma} U_{\gamma,12}^0 \right) X^{3-\alpha} \right],$$

$$\varepsilon_{33} = Z_{,3}^{\gamma} \left(U_{\gamma,3}^0 + U_{\gamma,3\alpha}^0 X^\alpha \right),$$

де $Z_{,I}^i = Z_{,I}^i \Big|_{x^\alpha=0}$, $Z_{,12}^{\gamma} = \frac{\partial Z_{,1}^{\gamma}}{\partial X^2} \Big|_{x^\alpha=0}$ (25)

$$U_{i,I}^0 = U_{i,I} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad U_{i,I\alpha}^0 = \frac{\partial U_{i,I}}{\partial X^\alpha} \Big|_{x^\alpha=0}. \quad (26)$$

Відповідно до прийнятого закону розподілу переміщень (21) визначимо їх похідні в центрі елемента (26):

$$U_{i,\alpha}^0 = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} U_{i(S_1,S_2)} S_\alpha,$$

$$U_{i,3}^0 = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} U_{i(S_1,S_2)} S_3. \quad (27)$$

Тоді для компонент тензора деформацій (24) можна записати:

$$\varepsilon_{\alpha(\alpha)} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \frac{1}{2} \left[Z_{,\alpha}^{\gamma} S_{(\alpha)} + \left(Z_{,12}^{\gamma} S_\alpha + 2 Z_{,\alpha}^{\gamma} S_1 S_2 \right) X^{(3-\alpha)} \right] \cdot U_{\gamma(S_1,S_2)};$$

$$\varepsilon_{12} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \frac{1}{4} \left(Z_{,1}^{\gamma} S_2 + Z_{,2}^{\gamma} S_1 \right) U_{\gamma(S_1,S_2)}, \quad (28)$$

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left\{ \frac{1}{8} \left[Z_{,\alpha}^{\gamma} + \left(Z_{,12}^{\gamma} + 2 Z_{,\alpha}^{\gamma} S_{(3-\alpha)} \right) X^{(3-\alpha)} \right] \times \right. \\ \left. \times U_{\gamma(S_1,S_2),3} + \frac{1}{4} Z_{,3}^{\gamma} \left(S_\alpha + 2 S_1 S_2 X^{3-\alpha} \right) U_{\gamma(S_1,S_2)} \right\};$$

$$\varepsilon_{33} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \frac{1}{4} Z_{,3}^{\gamma} \left(1 + 2 S_\alpha X^\alpha \right) U_{\gamma(S_1,S_2),3}.$$

Виразивши переміщення відрізками рядів Фур'є (20) і виконавши, де це необхідно, диференціювання по X^3 , отримуємо:

$$\varepsilon_{\alpha(\alpha)} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{\ell=1}^L \frac{1}{2} \left[Z_{,\alpha}^{\gamma} S_{(\alpha)} + \left(Z_{,12}^{\gamma} S_\alpha + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 Z_{,\alpha}^{\gamma} S_1 S_2 \right) X^{(3-\alpha)} \right] \sin \frac{\ell \pi (X^3 + 1)}{2} U_{\gamma(S_1,S_2)}^\ell;$$

$$\varepsilon_{\alpha(\alpha)} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{\ell=1}^L \left(Z_{,1}^{\gamma} S_2 + Z_{,2}^{\gamma} S_1 \right) \times \\ \times \sin \frac{\ell \pi (X^3 + 1)}{2} \cdot U_{\gamma(S_1,S_2)}^\ell, \quad (29)$$

$$\varepsilon_{\alpha(\alpha)} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{\ell=1}^L \left\{ \frac{\ell \pi}{16} \left[Z_{,\alpha}^{\gamma} + \left(Z_{,12}^{\gamma} + 2 Z_{,\alpha}^{\gamma} S_{(3-\alpha)} \right) X^{(3-\alpha)} \right] \right. \\ \left. U_{\gamma(S_1,S_2)}^\ell + \frac{1}{4} Z_{,3}^{\gamma} \left(S_2 + 2 S_1 S_2 X^{(3-\alpha)} \right) U_{\gamma(S_1,S_2)}^\ell \right\} \cdot \cos \frac{\ell \pi (X^3 + 1)}{2};$$

$$\varepsilon_{33} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{\ell=1}^L -\frac{\ell \pi}{8} Z_{,3}^{\gamma} \cdot \\ \cdot \left(1 + 2 S_\alpha X^\alpha \right) \sin \frac{\ell \pi (X^3 + 1)}{2} \cdot U_{\gamma(S_1,S_2)}^\ell.$$

Як вихідним співвідношенням при виведенні формул для обчислення вузлових реакцій і коефіцієнтів матриці жорсткості скористаємося виразом варіації енергії скінченного елемента:

$$\delta \omega = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \delta^{il} \sigma \varepsilon_{il} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 \quad (30)$$

або в матричній формі:

$$\delta \omega = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left(\sigma \{ \varepsilon \}^T \{ \sigma \} \cdot \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 \right), \quad (31)$$

$$\text{де } \{ \varepsilon \}^T = \{ \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} 2\varepsilon_{12} 2\varepsilon_{13} 2\varepsilon_{23} \} \quad (32)$$

$$\{ \sigma \}^T = \{ \sigma^{11} \sigma^{22} \sigma^{33} \sigma^{12} \sigma^{13} \sigma^{23} \}.$$

Зв'язок між деформаціями і коефіцієнтами розкладання переміщень в ряди Фур'є представимо у вигляді:

$$\{\varepsilon\} = \sum_{\ell=1}^L \left([B_1]_{\ell} \sin \frac{\ell\pi(x^3+1)}{2} + [B_2]_{\ell} \cos \frac{\ell\pi(x^3+1)}{2} \{U\}_{\ell} \right), \quad (33)$$

$$\text{де } [B_1]_{\ell} = \left[[B_1]_{\ell}^{(-1,-1)} [B_1]_{\ell}^{(+1,-1)} [B_1]_{\ell}^{(-1,+1)} [B_1]_{\ell}^{(+1,+1)} \right],$$

$$[B_2]_{\ell} = \left[[B_2]_{\ell}^{(-1,-1)} [B_2]_{\ell}^{(+1,-1)} [B_2]_{\ell}^{(-1,+1)} [B_2]_{\ell}^{(+1,+1)} \right] \quad (34)$$

$$\{U\}_{\ell}^T = \left\{ \{U\}_{\ell(-1,-1)}^T \{U\}_{\ell(+1,-1)}^T \times \{U\}_{\ell(-1,+1)}^T \{U\}_{\ell(+1,+1)}^T \right\}.$$

$$\{U\}_{\ell(S_1, S_2)}^T = \left\{ U_{1(S_1, S_2)}^T \ U_{2(S_1, S_2)}^T \ U_{3(S_1, S_2)}^T \right\}.$$

Елементи підматриць $[B_1]_{\ell}^{(S_1, S_2)}$ і $[B_2]_{\ell}^{(S_1, S_2)}$ обчислюються згідно (29) і наведені в табл. 1 і 2 відповідно.

Запишемо варіацію енергії через коефіцієнти розкладання переміщень в ряди Фур'є і вузлові реакції призматичного скінченного елемента:

$$\delta\omega = \sum_{\ell=1}^L \left(\delta\{U\}_{\ell}^T \right) \{r\}_{\ell}, \quad (35)$$

де

$$\{r\}_{\ell} = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \left([B_1]_{\ell}^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \{\sigma\} \sin \frac{\ell\pi(x^3+1)}{2} dx^3 + [B_2]_{\ell}^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \{\sigma\} \cos \frac{\ell\pi(x^3+1)}{2} dx^3 \right) \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (36)$$

Виконуючи чисельне інтегрування, отримуємо формулу для обчислення вузлових реакцій призматичного скінченного елемента зі змінними в перерізі $x^3 = const$ механічними та геометричними параметрами (се 1) через напруження:

$$\{r\}_{\ell} = \sum_{i=1}^1 \sum_{I=1}^I \left[\left([B_1]_{\ell}^T \{\sigma_1\}_{\ell} + [B_2]_{\ell}^T \{\sigma_2\}_{\ell} \right) \sqrt{g} H_i H_I \right]_{(x_i^1, x_i^2)}, \quad (37)$$

де відповідно до формул гармонійного аналізу

$$\{\sigma_1\}_{\ell} = \frac{2}{M} \sum_{m=1}^M \left(\{\sigma\} \sin \frac{\ell\pi(x^3+1)}{2} \right)_m.$$

Таблиця 1

$$[B_1]_{\ell}^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left[Z_{1,1}^0 S_1 + \left(Z_{1,12}^0 + 2Z_{1,2}^0 S_1 S_2 \right) x^2 \right] & \frac{1}{2} \left[Z_{1,1}^0 S_1 + \left(Z_{1,12}^0 + 2Z_{1,2}^0 S_1 S_2 \right) x^2 \right] & 0 \\ \frac{1}{2} \left[Z_{2,2}^0 S_2 + \left(Z_{2,12}^0 + 2Z_{2,2}^0 S_1 S_2 \right) x^1 \right] & \frac{1}{2} \left[Z_{2,2}^0 S_2 + \left(Z_{2,12}^0 + 2Z_{2,2}^0 S_1 S_2 \right) x^1 \right] & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} \ell\pi \left[1 + 2(S_1 x^1 + S_2 x^2) \right] Z_3^0 \\ \frac{1}{2} \left(Z_{1,2}^0 S_2 + Z_{2,1}^0 S_1 \right) & \frac{1}{2} \left(Z_{1,2}^0 S_2 + Z_{2,1}^0 S_1 \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Таблиця 2

$$[B_2]_{\ell}^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} \ell\pi \left[Z_{1,1}^0 + \left(Z_{1,12}^0 + 2Z_{1,2}^0 S_2 \right) x^2 \right] & \frac{1}{8} \ell\pi \left[Z_{1,1}^0 + \left(Z_{1,12}^0 + 2Z_{1,2}^0 S_2 \right) x^2 \right] & \frac{1}{2} S_1 Z_{1,3}^0 \\ \frac{1}{8} \ell\pi \left[Z_{2,2}^0 + \left(Z_{2,12}^0 + 2Z_{2,2}^0 S_1 \right) x^1 \right] & \frac{1}{8} \ell\pi \left[Z_{2,2}^0 + \left(Z_{2,12}^0 + 2Z_{2,2}^0 S_1 \right) x^1 \right] & \frac{1}{2} S_2 Z_{2,3}^0 \end{bmatrix}$$

$$\{\sigma_2\}_{\ell} = \frac{2}{M} \sum_{m=1}^M \left(\{\sigma\} \cos \frac{\ell\pi(x^3+1)}{2} \right)_m \quad (38)$$

Тут $1, I, M$ – кількість точок інтегрування по x^1, x^2, x^3 відповідно H_i, H_I – вагові функції;

x_i^1, x_i^2 – координати точок інтегрування. фізичні

значення напружень $\{\sigma_1\}$ і $\{\sigma_2\}$ підраховуються в

M рівномірно розташованих по довжині елемента точках. при цьому на характер їх розподілу в

напрямку x^3 не накладається ніяких обмежень, що дає змогу використовувати формули (37) для визначення вузлових реакцій не тільки в пружній стадії роботи матеріалу, а й за межею пружності з урахуванням приведення напружень відповідно до прийнятого умовою плинності.

При виведенні формул для обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості зв'язок між напруженнями і деформаціями візьмемо в рамках узагальненого закону Гука:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \quad (39)$$

де елементи матриці (табл. 3) обчислюються відповідно до (12).

Підставляючи (39) в (31), отримуємо:

$$\sigma\omega = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \delta\{\varepsilon\}^T \times [D]\{\varepsilon\} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (40)$$

Таблиця 3

$$[D] = \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1122} & C^{1133} & C^{1112} & 0 & 0 \\ C^{2211} & C^{2222} & C^{2233} & C^{2212} & 0 & 0 \\ C^{3311} & C^{3322} & C^{3333} & C^{3312} & 0 & 0 \\ C^{1211} & C^{1222} & C^{1233} & C^{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C^{1313} & C^{1323} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C^{2313} & C^{2323} \end{bmatrix}$$

Використовуючи співвідношення (33), запишемо варіацію енергії скінченного елемента через коефіцієнти розкладання переміщень в ряди Фур'є:

$$\begin{aligned} \delta\omega = & \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \sum_{\ell=1}^L (\delta\{U\}_\ell^T) \times \\ & \times \left([B_1]_{(\ell)}^T \sin \frac{\ell\pi(x^3+1)}{2} + \right. \\ & \left. + [B_2]_{(\ell)}^T \cos \frac{\ell\pi(x^3+1)}{2} [D] \times \right. \\ & \left. \times \sum_{n=1}^L \left([B_1]_{(n)} \sin \frac{n\pi(x^3+1)}{2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + [B_2]_{(n)} \cos \frac{n\pi(x^3+1)}{2} \right) \right) \times \\ & \times \{U\}_n \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \end{aligned} \quad (41)$$

Візьмемо до уваги, що

$$\begin{aligned} & \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \sin \frac{\ell\pi(x^3+1)}{2} + \\ & + \sin \frac{n\pi(x^3+1)}{2} dx^3 = \\ & = \begin{cases} 0n\eta\mu\ell \neq n \\ 1n\eta\mu\ell \neq n \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \cos \frac{\ell\pi(x^3+1)}{2} + \cos \frac{n\pi(x^3+1)}{2} dx^3; \\ & \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \sin \frac{\ell\pi(x^3+1)}{2} + \\ & + \cos \frac{n\pi(x^3+1)}{2} dx^3 = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Після інтегрування в (41) по x^3 можна записати:

$$\delta\omega = \sum_{\ell=1}^L (\delta\{U\}_\ell^T) [K]_{\ell(\ell)} \{U\}_\ell,$$

де

$$\begin{aligned} [K]_{\ell(\ell)} = & \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \left([B_1]_\ell^T + [B_2]_\ell^T \right) \times \\ & \times [D] ([B_1]_\ell + [B_2]_\ell) \sqrt{g} dx^1 dx^2. \end{aligned} \quad (43)$$

Інтегруючи по x^1 і x^2 чисельно, отримуємо формулу для обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості призматичного скінченного елемента зі змінними механічними і геометричними параметрами (ce1):

$$\begin{aligned} [K]_{\ell(\ell)} = & \int_{i=1}^I \int_{I=1}^I \left([B_1]_\ell^T + [B_2]_\ell^T \right) \times \\ & \times [D] ([B_1]_\ell + [B_2]_\ell) \sqrt{g} H_i H_I \Big|_{x_i^1, x_i^2}. \end{aligned} \quad (44)$$

Висновок

Завдяки використанню МССЕ отримані співвідношення універсального скінченного елемента, які забезпечують можливість розрахунку напіваналітичним методом скінчених елементів як масивних, так і тонкостінних довільно навантажених призматичних тіл складної форми з урахуванням пластичних властивостей матеріалу.

Розглянуто дві модифікації призматичного скінченного елемента, порівняння яких дає змогу обґрунтувати вибір оптимального, з точки зору досягнення заданої точності, результатів при мінімальному обсязі обчислень варіантів.

Список літератури

1. Bazhenov V. A., Shkriľ A. A., Maksimyuk Yu. V., Martyniuk I. Yu., Maksimyuk O. V. (2020). Semi-analytical method of finished elements in elastic and elastic-plastic position for curviline prismatic objects. *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&Technical collected articles*. Kyiv: KNUBA, 2020. Issue 105. P. 24–32.
2. Maksimyuk Yu. V., Pyskunov S. O., Shkriľ A. A., Maksimyuk O. V. (2020). Basic relations for physically and geometrically nonlinear problems of deformation of prismatic bodies. *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&Technical collected articles*. Вип. 104. С. 255–264.
3. Баженов В. А., Гуляр О. І., Пискунов С. О., Сахаров О. С. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах континуального руйнування просторових тіл: монографія. Київ: Каравела, 2014, 236 с.
4. Гуляр А. И., Сахаров А. С., Топор А. Г. Алгоритм решения задач пластичности для неоднородных тел. Вращения. Киев, 1986, 23 с. Рукопис деп. в УкрНИИТИ, 1986, №1415 УК-86.
5. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Москва: Физматгиз, 1960. 456 с.
6. Левитас В. И. Большие упруго-пластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наук. думка, 1987. 232 с.
7. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. Москва: Наука, 1980, 512 с.
8. Максим'юк Ю. В., Солодей І. І., Стригун Р. Л. Вихідні співвідношення нелінійного динамічного формозмінення вісесиметричних та плоскодеформівних тіл. *Опір матеріалів і теорія споруд*, 2019. Вип. 102. С. 252–262.
9. Максим'юк Ю. В., Козак А. А., Максим'юк О. В. Розв'язувальні співвідношення моментної схеми скінченних елементів в задачах термов'язкопружнопластичного деформування. *Будівельні конструкції теорія і практика: зб. наук. праць*. Київ: КНУБА, 2019. Вип. 4. С. 10–20.
10. Сахаров А. С., Кислоокій В. Н., Киричевский В. В. и др. Метод конечных элементов в механике твердых тел. Киев: Вища школа, 1982. 479 с.

Стаття надійшла до редколегії 14.05.2020

Ivanchenko Grigory

DSc (Eng.), Associate Professor, Department of Structural Mechanics, orcid.org/0000-0003-1172-2845
Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

Maksimyuk Yurii

DSc (Eng.), Associate Professor, Department of Structural Mechanics, orcid.org/0000-0002-5814-6227
Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

Kozak Andriy

PhD, Associate Professor, Department of structural mechanic, orcid.org/0000-0002-3192-1430
Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

Martyniuk Ivan

PhD, doctoral student, Department of structural mechanic, orcid.org/0000-0001-7957-2068
Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

CONSTRUCTION OF SOLVING EQUATIONS OF SEMI-ANALYTICAL METHOD OF FINISHED ELEMENTS FOR PRISMATIC BODIES OF COMPLEX SHAPE

Annotation. The article presents an effective numerical approach to the study of arbitrarily loaded massive and thin-walled prismatic bodies of complex shape, the deformation of which can take place beyond the elasticity of the material. The equations of the semi-analytical finite element method (SAFEM) when used to decompose the displacements of Fourier series. The main relations between the spatial problem of the theory of elasticity in a curvilinear coordinate system and the theory of plastic flow for an isotropically reinforcing material under the Mises fluidity condition are presented. In accordance with the method of the moment scheme of finite elements (MSFE), the expressions of deformations of the prismatic finite element due to the nodal values of amplitude displacements are obtained. Formulas for calculating the stiffness matrix coefficients of a finite element (FE) with variable and averaged in the cross-sectional plane mechanical and geometric parameters are derived.

Keywords: finite element method, semi-analytical finite element method; moment on the scheme of finite elements; prismatic bodies of complex shape; universal finite element; theory of elasticity; theory of plastic flow; stiffness matrix

References

1. Bazhenov V. A., Shkriil' A. A., Maksimyuk Yu. V., Martyniuk I. Yu., & Maksimyuk O. V., (2020). Semi-analytical method of finished elements in elastic and elastic-plastic position for curviline prismatic objects. *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&Technical collected articles*. Kyiv: KNUBA. Issue 105. P. 24–32.
2. Maksimyuk Yu. V., Pyskunov S. O., Shkriil' A. A., & Maksimyuk O. V., (2020). Basic relations for physically and geometrically nonlinear problems of deformation of prismatic bodies. *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&Technical collected articles*. Вип. 104. P. 255–264.
3. Bazhenov V. A., Gulyar A. I., Piskunov S. O., Sakharov O. S., (2014). Semi Analytical method of finite elements in problems of continuous destruction of spatial bodies: Monograph. Kiev: Caravela. 236 p.
4. Gulyar A. I., Sakharov A. S., Topor A. G., (1986). Algorithm for Solving Plasticity Problems for Inhomogeneous Bodies. Rotation. Kiev, 23 p. Manuscript dep. In UkrNIINTI, 1986, №1415 UK-86.
5. Kachanov L. M., (1960). Foundations of the theory of plasticity. Moscow: Fizmatgiz, 456 p.
6. Levitas V. I., (1987). Large elastic-plastic deformations of materials at high pressure. Kiev: Nauk. dumka, 232 p.
7. Lurie A. I., (1980). Nonlinear theory of elasticity. Moscow: Nauka, 512 p.
8. Maksimyuk Yu. V., Solodey I. I., & Strygun R. L., (2019). Initial relations of nonlinear dynamic shape change of axisymmetric and plane-deformable bodies. *Resistance of materials and theory of structures*. Issue. 102. P. 252–262.
9. Maksimyuk Yu. V. Kozak A. A., & Maksimyuk O. V., (2019). Solving relations of the moment scheme of finite elements in problems of thermoviscoelastic deformation. *Building constructions theory and practice: a collection of scientific works*. Kiev: KNUBA, Issue 4. P.10–20.
10. Sakharov A. S., Sour V. N., Kirichevsky V. V. and etc. (1982). The finite element method in solid mechanics. Kiev: Vishcha school, 479 p.

Посилання на публікацію

- APA Ivanchenko Grigory, Maksimyuk Yurii, Kozak Andriy, & Martyniuk Ivan, (2021). Construction of solving equations of semi-analytical method of finished elements for prismatic bodies of complex shape. *Management of Development of Complex Systems*, 46, 55–62, dx.doi.org\10.32347/2412-9933.2021.46.55-62.
- ДСТУ Іванченко Г. М., Максим'юк Ю. В., Козак А. А., Мартинюк І. Ю. Побудова розв'язувальних рівнянь напіваналітичного методу скінченних елементів для призматичних тіл складної форми. *Управління розвитком складних систем*. Київ, 2021. № 46. С. 55 – 62, dx.doi.org\10.32347/2412-9933.2021.46.55-62.