

Кривенко-Еметов Ярослав Дмитрович

Кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної фізики,

<https://orcid.org/0000-0001-8017-3638>

Національний технічний університет України "КПІ" ім. Ігоря Сікорського, Київ

Інститут ядерних досліджень НАН України, Київ

**ДВОКОМПОНЕНТНА СТАТИСТИЧНА МОДЕЛЬ ЯДЕРНОГО ФАЄРБОЛУ
В СТАДІЇ ОХОЛОДЖЕННЯ (ФРІЗАУТУ)**

***Анотація.** До статистичного інтеграла Великого канонічного ансамблю для випадків однокомпонентного та двокомпонентного газу Ван-дер-Ваальса застосовано метод перевалу. Це дало змогу отримати рівняння стану та поправки до тиску і щільності скінченної статистичної системи. Зазначені вклади з урахуванням реалістичного ефективного потенціалу допомагають враховувати скінченні розміри системи і, як очікується, можуть бути використані зокрема в разі ядерного фаєрболу, що виникає в ядро-ядерних зіткненнях за високих енергій. Поправки, що залежать від розмірів системи, були порівняні з відповідними флуктуаціями. Ці поправки стають несуттєвими на термодинамічній межі, де, згідно зі статистичною фізикою, зникає різниця між спостережуваними термодинамічними величинами, отриманими в різних статистичних ансамблях. Враховуючи сучасні оцінки щодо розмірів мезонів та нуклонів, а також реалістичні оцінки для потенціалів їх ефективних взаємодій, отримано формули для тиску з прозорим нерелятивістським обмеженням. Очікується, що вони можуть бути використані для аналізу експериментальних даних щодо кількісних характеристик виходу частинок різних сортів у кінцевому стані від фінальних стадій фрізауту, та визначення критичних параметрів системи в ядро-ядерних зіткненнях за високих енергій.*

***Ключові слова:** фаєрбол; фрізаут; рівняння Ван-дер-Ваальса; ефективний ядерний потенціал; Великий канонічний ансамбль; флуктуація тиску; кварк-глюонна плазма; експериментальні дані*

Вступ

Експериментальне спостереження еліптичного потоку при нецентральному зіткненні важких ядер за високих енергій дає багато свідчень того, що у цих зіткненнях ядер утворюється стан кварк-глюонної плазми та відбувається термалізація, яка пов'язана з тим, що частинки неодноразово зіштовхуються одна з одною. Для такого стану можна ввести поняття температури, в'язкості, щільності та інших термодинамічних величин, що характеризують речовину. У цих термінах можна описувати і вивчати явища, що відбуваються при остиганні адронного газу, що утворився після фазового переходу зі стану кварк-глюонної плазми. Вважається, що при критичній температурі ($T > 150$ MeV, так званій температурі Хагедорна) адрони "плаваються" і відбувається фазовий перехід газу адронів (адронної матерії) у кварк-глюонну фазу. Тому в останні десятиліття статистичні моделі адронного газу активно використовуються для опису даних Великого адронного колайдера (LHC), Релятивістського колайдера важких іонів (RHIC), а ще раніше для опису даних Alternating Gradient

Synchrotron (AGS) та Super proton synchrotron (SPS), щодо виходу частинок у релятивістському ядро-ядерному ($A + A$) зіткненні за високих енергій [1; 2]. Модель Ван-дер-Ваальса (ВДВ) з урахуванням адрон-адронних взаємодій на невеликих відстанях виявилася особливо корисною при цьому описі [3 – 10]. Це пов'язано з тим, що врахування ефекту відштовхування (виключених об'ємів) приводить до запобігання небажано великим значенням щільності за високих температур, які з'являються у моделях ідеального газу [11]. Крім того, при зіткненнях важких високоенергетичних іонів у LHC утворюється велика кількість різних видів частинок. Кількість цих частинок не фіксована. Тому одним із адекватних математичних формалізмів для цих явищ виявився формалізм Великого канонічного ансамблю (ВКА). У цьому випадку термодинамічні величини залежать не від кількості частинок, а від хімічних потенціалів. Протягом багатьох років дослідниками були запропоновані та застосовані різні версії моделей ВДВ. Вони переважно використовувалися для опису експериментальних даних щодо співвідношення кількості частинок за високих енергій, коли десятки або навіть сотні адронів різних

видів можуть народжуватися. Звісно, цей процес народження обмежується лише енергією зіткнень.

Серед цих моделей слід відмітити модель, запропоновану в роботі [11]. У цій моделі введено феноменологічні параметри радіусів твердого кора ядра R_{ii} і R_{ij} , що помітно змінює вихід кількості частинок різних сортів N_i (i – сорт частинки) та здебільшого підтверджується експериментальними даними. Щоб описати більш тонкі ефекти залежності адронного тиску газу від щільності, різними авторами (наприклад, [12; 13]) було запропоновано розвинення зазначеної моделі [11]. Тут враховувалися ефекти притягання між адронами на великій відстані, що приводить до появи відповідного внеску в тиск, виду $P_{attr} \sim -an^2$ (де n – щільність). При цьому параметри ефективного потенціалу (для багатокомпонентного газу параметр a , що відповідає притягання, переходить у параметри a_{ij} , а параметр відштовхування b – у параметри b_{ij}), що відповідають, відповідно, притягання та відштовхуванню, так залежать від ефективних радіусів відштовхування R_i^0 та притягання R_i :

$$a_{ij} = u_0^{ij} (c_{ij} - b_{ij}),$$

$$b_{ij} = \frac{2}{3} \pi (R_i^0 + R_j^0)^3,$$

$$c_{ij} = \frac{2}{3} \pi (R_i + R_j)^3.$$

u_0^{ij} – глибина ефективної потенційної ями [12].

Проте і ця модель ВДВ не може бути розвинена належним чином при розгляданні скінченної ядерної системи. Так, у разі ядро-ядерних зіткнень спостерігається ядерний фаєрбол розмірами $\langle r \rangle \sim 7 \div 10$ фм. У достатньо загальному випадку, цю проблему (без урахування ефектів відбивання від стінки системи) було вирішено для двокомпонентної системи. У цьому випадку формалізм ВКА приводить до використання подвійної суми, яку, своєю чергою, можна перетворити на багатовимірний інтеграл, інтегруючи методом перевалу в околі сідлової точки з координатами N_1^*, N_2^* [12].

Зрозуміло, що було б добре застосувати цю модель до аналізу експериментальних даних, отриманих для зіткнень важких ядер у ЦЕРНі. У стислій формі в роботі [14] подано один із варіантів такої моделі. Вважалося, що енергії зіткнень недостатньо високі, і можна обмежитися лише двома сортами: протонами та нейтронами. При цьому приймалося, що характерні температури не перевищують температури, за яких можуть

народжуватися нові частинки. Температури ядерного фаєрболу на стадії після переходу в адронну газову фазу є порядку $T \sim 135 \div 140$ MeV в одиницях $k_B = 1$ (фаза фрізауту, рис. 1). Тому сама модель має мати прозору нерелятивістську межу з урахуванням закону збереження загальної кількості нуклонів без народження нових частинок.

На рис. 1 зліва направо схематично зображено: два ультрарелятивістські ядра, що стикаються; стан гарячої та ультращільної ядерної системи; кварк-глюонна фаза; фаза адронізації; фаза охолодження (фрізауту) (рис. взято з [15]).

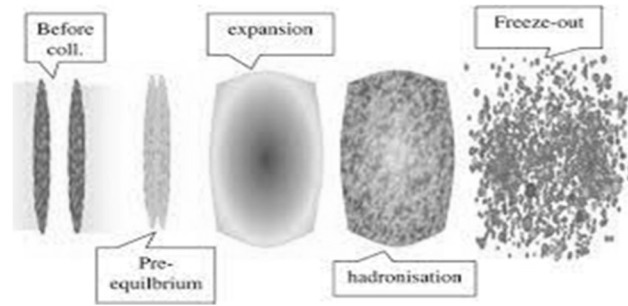


Рисунок 1 – Послідовні етапи еволюції ядерного фаєрболу

У роботі надано більш детальний і послідовний опис математичного апарату моделі [14], оцінено деякі більш тонкі ефекти (додаткові поправки до тиску, щільності та середньоквадратичні флуктуації), а також запропоновано нову двокомпонентну мезонну модель [16] для випадку температур, що вищі за поріг народження ($T > 135$ MeV), коли кількість мезонів не зберігається. В рамках цієї асиметричної мезонної моделі підраховано і порівняно з відповідною флуктуацією поправку до тиску, що виникає за рахунок скінченних розмірів ядерного фаєрболу.

Виклад основного матеріалу

Однокомпонентний газ ВДВ

За різними оцінками час існування ядерного фаєрболу є набагато більшим за характерний час ядерної взаємодії $t' \sim 10^{-22} \div 10^{-23}$ с, яка, для досить малих локальних об'ємів фаєрболу (підсистем), відповідає порядку часу релаксації $\tau \sim 10^{-21} \div 10^{-23}$ с. Тому вважатимемо, що у кожен момент часу, більший за час релаксації, в підсистемі встигає встановитися локальна статистична рівновага. Тобто така локальна область фаєрболу є квазістаціонарною, і тому до неї можуть бути застосовні методи статистичної фізики. Оскільки всі термодинамічні потенціали, також ентропія й об'єм, є адитивними (екстенсивними) величинами, тому відповідні потенціали (величини) всієї системи (фаєрболу) можна визначити як суму відповідних

термодинамічних потенціалів квазізамкнених підсистем [17]. Тоді в кожний момент часу для подібних квазізамкнених підсистем можна записати стандартне представлення статистичної суми $Z(V, T, N)$ розрідженого квазіідеального газу Ван-дер-Ваальса в канонічному ансамблі (КА). При наближенні попарної взаємодії та умови $B(T)N/V \ll 1$ ця величина має такий вигляд [17]:

$$Z(V, T, N) = \frac{1}{N!} \phi(T, m)^N (V - B(T)N)^N, \quad (1)$$

де N і m – кількість і маса частинок; V і T – об'єм і температура газу відповідно.

У формулі (1) використано позначення [11]:

$$\phi(T, m) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty p^2 \exp\left(-\frac{\sqrt{m^2 + p^2}}{T}\right) dp = \frac{m^2 T}{2\pi^2} K_2(m/T), \quad (2)$$

де $K_2(z)$ – модифікована функція Бесселя, а другий віріальний коефіцієнт в (1):

$$B(T) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (1 - \exp(-U/T)) dV \quad (3)$$

включає попарну взаємодію частинок, $U = U(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$, $i \neq j$.

У нерелятивістській границі $m \gg T$, враховуючи асимптотику функції Бесселя, легко отримати:

$$\phi(T, m) \sim \left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m}{T}\right).$$

Ця формула надалі приводить до ефекту експоненційного пригнічення виходу частинок великої маси, який є важливим при дослідженні кварк-глюонної плазми.

Зі статистичної суми легко розраховується тиск у системі:

$$\tilde{P}(V, T, N) = T \frac{\partial}{\partial V} \ln[Z(V, T, N)] = \frac{TN}{V - B(T)N}. \quad (4)$$

Значимо, що якщо у статистичній сумі для факторіалу використати формулу Стірлінга:

$N! \approx \sqrt{2\pi N} (N/e)^N$, то остаточна формула для тиску (4) не зміниться.

***ФОРМУЛЮВАННЯ МОДЕЛІ.** Згідно з вищеведеним усі розрахунки для підсистем будуть здійснюватися методами статистичної фізики, що передбачає, крім локальної статистичної рівноваги, ще виконання умови статистичної (термодинамічної) границі: $N \rightarrow N_A$, де N_A є сталою Авогадро.

При цьому остаточні формули, внаслідок зазначеної адитивності термодинамічних потенціалів та об'єму, будуть застосовані до

ядерного фаєрболу. Оскільки при високоенергетичних ядро-ядерних взаємодіях кількість народжуваних частинок у фаєрболі близько 4–6 тисяч, то на перших етапах його еволюції таке припущення є більш-менш виправданим. Звичайно, на пізніших етапах еволюції, оскільки кількість нуклонів на нерелятивістській границі обмежена законом збереження баріонного числа і дорівнює $N = 200 \div 300$ (зіттовхуються ядра важких елементів з масовим числом $A \sim 200$), це припущення, загалом, є децю сумнівним. Проте, як свідчить досвід, практичне застосування рівняння Ван-дер-Ваальса досить часто виходить за межі умов, у яких було отримано віріальне наближення. Враховуючи цей факт, а також те, що завжди можна обмежитися лише першим етапом, вважаємо наше наближення досить обґрунтованим.

Хоча розрахунки методом перевалу проводяться при $B(T) < 0$, проте, з тих же самих причин, остаточні формули розповсюджуємо на області, коли $B(T)$ не обов'язково є від'ємним.

Зі статистичної суми $Z(V, T, N)$ можна також отримати: вільну енергію

$F(V, T, N) = -T \ln[Z(V, T, N)]$, хімічний потенціал.

$$\mu = \left(\frac{\partial F(V, T, N)}{\partial N}\right) = T \left[\ln(N/V) - \ln(\phi(T, m)) + \frac{2B(T)N}{V} \right] \quad (5)$$

та похідну від хімічного потенціалу, яка в статистичній границі має вигляд:

$$\begin{aligned} (\partial\mu/\partial N) &= -(\partial P/\partial V)(V/N)^2 = \\ &= \lim_{N \rightarrow N_A} \left(\frac{T}{N} + \frac{2B(T)T}{V} \right) \rightarrow \frac{2B(T)T}{V}. \end{aligned} \quad (6)$$

Тоді, враховуючи фізичні міркування, зазначені у Вступі, зі статистичної суми $Z(V, T, N)$ отримаємо Велику статистичну суму (BCC) $\tilde{Z}(V, T, \mu)$ (див., наприклад [19, с. 138]):

$$\tilde{Z}(V, T, \mu) = \sum_N \exp\left(\frac{\mu N}{T}\right) Z^*(V, T, N). \quad (7)$$

Ця формула отримана з мікроканонічного ансамблю, коли система уявно поділена на тіло (підсистему) і середовище (все інше). Виконано подальше розвинення в ряд Тейлора функції ентропії середовища за малими (відносно системи) параметрами енергії тіла та кількості частинок у тілі, нехтуючи при цьому другим і вище порядками розкладання [11].

За високих температур (які, наприклад, реалізуються при зіткненнях важких іонів у ВКА, і $\Delta N/T \rightarrow dN'$) можна за формулою Ейлера–Маклорена перейти від суми до інтеграла. При цьому залишається перший інтегральний доданок і вводиться в показник експоненти логарифм від статистичної суми (позначимо цей показник через $\Phi(N')$):

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(V, T, \mu) &= T \int_0^\infty dN' \exp(\mu N' + \\ &+ \ln [Z(V, N'(T))]) = \\ &= T \int_0^\infty dN' \exp(\Phi(N')). \end{aligned} \quad (8)$$

Завдяки тому, що за високих температур підінтегральний вираз має сильно виражений максимум, подальше інтегрування проводиться методом перевалу (рис. 2, [16]). Умова екстремуму, що накладається на сідлову точку, дає наступний вираз для знаходження точки максимуму (N^*) для підінтегральної функції:

$$\mu^*(N^*) = - \left(T \frac{\partial}{\partial N} \ln [Z(V, T, N)] \right)_{N=N^*} - N^* \left(\frac{\partial \mu}{\partial N} \right)_{N=N^*}, \quad (9)$$

$$\mu^*(N^*) \approx T (\ln(N^*/V)) - \ln(\phi(T, m)), \quad (10)$$

де μ^* – хімічний потенціал у точці перевалу.

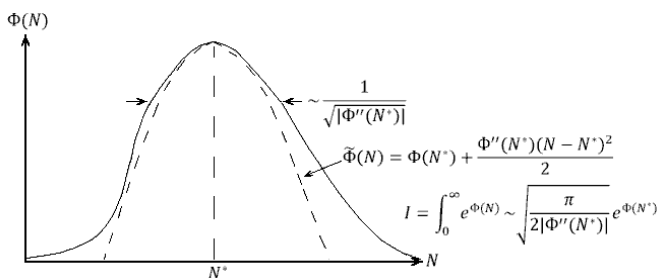


Рисунок 2 – Графічне пояснення методу перевалу

У результаті отримуємо:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(V, T, N) &= \sqrt{\frac{\pi}{2|\partial^2 \Phi / \partial N^2|_{N=N^*}}} \times \\ &\times \frac{\phi(T, m)^{N^*}}{\sqrt{2\pi N^*} (N^*/e)^{N^*}} V^{N^*} \times \\ &\times \exp\left(\frac{\mu}{T} - \frac{B(T)N^*}{V}\right) N^*, \end{aligned} \quad (11)$$

де друга похідна від показника експоненти Φ у сідловій точці визначається так:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial N^2} \right)_{N=N^*} &= \frac{N^*}{T} \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial N^2} \right)_{N=N^*} + \frac{2}{T} \left(\frac{\partial \mu}{\partial N} \right)_{N=N^*} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 \ln Z(V, T, N)}{\partial N^2} \right)_{N=N^*} = \frac{N^*}{T} \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial N^2} \right)_{N=N^*} + \\ &+ \frac{1}{T} \left(\frac{\partial \mu}{\partial N} \right)_{N=N^*} = -\frac{1}{N^*} + \frac{1}{N^*} + \frac{2B(T)}{V} = \frac{2B(T)}{V} < 0, \end{aligned}$$

оскільки

$$\begin{aligned} \frac{N^*}{T} \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial N^2} \right)_{N=N^*} &= -\frac{1}{N^*}, \\ \left(\frac{\partial \mu}{\partial N} \right)_{N=N^*} &= - \left(\frac{N^* \partial^2 \ln Z(V, T, N)}{\partial N^2} \right)_{N=N^*}. \end{aligned}$$

У ВКА тиск наступним чином визначається через температуру T і логарифм ВСС (див., наприклад, [18]):

$$P(T, \mu) = T \frac{\ln \tilde{Z}(V, T, \mu)}{V}. \quad (12)$$

Легко показати, що тиск (12), враховуючи (5) та (11), можна переписати так:

$$\begin{aligned} P(T, \mu^*) &\approx T \xi \left[1 - B(T) \xi - \right. \\ &\left. - \frac{\ln(N^* \partial^2 \Phi / \partial N^2)_{N=N^*}}{2V \xi} \right] \approx \\ &\approx T \xi \left[1 - B(T) \xi - \frac{\ln(B(T) \xi)}{2V \xi} \right], \end{aligned} \quad (13)$$

де сідлова точка $\xi = N^*(V, T, \mu^*)/V$, згідно з (5) та (10), визначається так:

$$n = \frac{\partial P(T, \mu)}{\partial \mu} = \xi [1 - 2B(T) \xi] - \frac{1}{2V} \rightarrow \xi [1 - 2B(T) \xi]. \quad (14)$$

На термодинамічній границі ($N \rightarrow N_A, V \rightarrow \infty$) при $N^* = N/(1 - 2B(T)N/V)$ хімічний потенціал сідлової точки μ^* з (10) перетворюється на хімічний потенціал μ ($\mu^* \rightarrow \mu$), який фіксується добре відомою термодинамічною рівністю (5).

Обидва рівняння (13) і (14) у параметричному вигляді (параметром виступає сідлова точка ξ) визначають зв'язок між тиском P , температурою T і щільністю n . Виключаючи явно із системи рівнянь (13) і (14) цей параметр, отримуємо рівняння стану в ВКА:

$$P(T, \mu, n) \approx Tn [1 + B(T)n] + dP. \quad (15)$$

Звичайно, отримане рівняння стану неявно залишається параметричним рівнянням, оскільки згідно з (5) та (10) сідлова точка ξ (а значить, і n) визначає хімічний потенціал μ .

Важливо, що в отриманій формулі враховується внесок у тиск скінченного об'єму системи V_s . Цей внесок, природно, зникає в термодинамічній границі, де немає різниці між КА і ВКА. Для великих, але скінчених об'ємів (як, наприклад, у розглянутій в останньому розділі моделі ядерного фаєрболу), з трьох доданків залишається тільки останній:

$$dP = \lim_{V \rightarrow V_s} \frac{T}{2V} [1 + B(T)n - \ln[B(T)n]] \rightarrow -\frac{T \ln[B(T)n]}{2V_s}. \quad (16)$$

Оскільки цей доданок зникає в термодинамічній границі ($V \rightarrow V_s$), то після цього рівняння, що отримано для випадку частинок нульових радіусів притягання та відштовхування ($B(T) = 0$), переходить у рівняння ідеального газу:

$$P(T, \mu, n) = P^{id}(T, \mu) = Tn^{id}(T, \mu). \quad (17)$$

Для оцінки знайдених поправок до тиску та щільності можна, згідно з відомими формулами (див., наприклад, [20]), підрахувати середньоквадратичні флуктуації відповідних величин:

$$\langle (\Delta P)^2 \rangle \approx \frac{Tn}{V} (\partial P / \partial n)_s \sim \frac{T^2 n}{V} [1 + 2B(T)n], \quad (18)$$

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle \approx \frac{T}{(\partial \mu / \partial N)_{N=N^*} V^2} \sim \frac{1}{N^* V^2} [1 - 2B(T)n]. \quad (19)$$

Двокомпонентний газ ВДВ

Розглянемо процедуру врахування в моделі ВДВ виключених об'єму та притягання для випадку двокомпонентного адронного газу двох видів частинок "і" та "j" (N_1 і N_2 – кількість частинок першого та другого сорту). У цьому випадку статистична сума виглядає так:

$$Z(V, T, N_1, N_2) = \frac{1}{N_1! N_2!} \int \prod_{l=1}^{N_1} d^3 p_l^{(1)} d^3 r_l^{(1)} \exp \left(-\frac{\sqrt{(m^{(1)})^2 + (p_l^{(1)})^2}}{T} \right) \times \int \prod_{k=1}^{N_2} d^3 p_k^{(2)} d^3 r_k^{(2)} \exp \left(-\frac{\sqrt{(m^{(2)})^2 + (p_k^{(2)})^2}}{T} \right) \times \exp(-U^{(12)} T), \quad (20)$$

де $m^{(1)}$ і $m^{(2)}$ – маса частинок 1-го та 2-го сортів, відповідно, а двочастинковий потенціал $U^{(12)}$ має такий вигляд:

$$U^{(12)} = \sum_{1 \leq m < l \leq N_1} u_{11} \left(\left| \vec{r}_m^{(1)} - \vec{r}_l^{(1)} \right| \right) + \sum_{1 \leq k < s \leq N_2} u_{22} \left(\left| \vec{r}_k^{(2)} - \vec{r}_s^{(2)} \right| \right) + \sum_{m=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} u_{12} \left(\left| \vec{r}_m^{(1)} - \vec{r}_k^{(2)} \right| \right).$$

Після тривіальної інтеграції за імпульсами вираз (20) набуває такого вигляду:

$$Z(V, T, N_1, N_2) = \frac{1}{N_1! N_2!} \left[\phi(m^{(1)}, T) \right]^{N_1} \left[\phi(m^{(2)}, T) \right]^{N_2} \times \int \prod_{l=1}^{N_1} d^3 r_l^{(1)} \times \int \prod_{k=1}^{N_2} d^3 r_k^{(2)} \times \exp(-U^{(12)} T). \quad (21)$$

У наближенні парних взаємодій $U^{(123)} \ll U^{(12)}$ та слабоідеального газу ($2NB/V \ll 1$) цей вираз, згідно з відомою процедурою [11], можна записати так:

$$Z(V, T, N_1, N_2) \sim \frac{1}{N_1! N_2!} \phi(m^{(1)}, T)^{N_1} \phi(m^{(2)}, T)^{N_2} \times (V - B_{11} N_1 - \tilde{B}_{21} N_2)^{N_1} (V - B_{22} N_2 - \tilde{B}_{12} N_1)^{N_2}. \quad (22)$$

$$\text{Тут введено позначення } \tilde{B}_{ij} = 2 \frac{B_{ii} B_{ij}}{B_{ii} + B_{jj}}.$$

Як відомо [12, 17], двочастинкова статистична сума $\tilde{Z}(V, T, \mu_1, \mu_2)$ у ВКА так виражається через двочастинкову статистичну суму $Z(V, T, N_1, N_2)$ в КА:

$$\tilde{Z}(V, T, \mu_1, \mu_2) = T^2 \int_0^\infty dN'_1 \int_0^\infty dN'_2 e^{\mu_1 N'_1 + \mu_2 N'_2} Z(V, T, N'_1, N'_2) = T^2 \int_0^\infty dN'_1 \int_0^\infty dN'_2 \exp(\Phi(N'_1, N'_2)). \quad (23)$$

Інтеграція (23), проведена за методом перевалу [21], приводить до наступного результату [12]:

$$\tilde{Z} \sim \frac{\pi}{2 \sqrt{|\Phi^*(N_1^*, N_2^*)|}} \exp \left(\frac{\mu_1 N_1^* + \mu_2 N_2^*}{T} \right) Z(V, T, N_1^*, N_2^*),$$

де координати сідлової точки N_i^* ($i = 1, 2$) знаходяться з умови екстремуму:

$$\frac{\partial \Phi(N_i^*, N_j^*)}{\partial N_i^*} = 0,$$

$$\Phi''(N_1^*, N_2^*) = \det \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix},$$

$$c_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \Phi(N_i', N_j')}{\partial N_i' \partial N_j'} \right)_{N'=N^*}.$$

Підставляючи значення статсуми у визначення тиску у ВКА [18], легко отримати наступне співвідношення [12]:

$$P(T, \mu_1, \mu_2) = T \frac{\ln \tilde{Z}(V, T, \mu_1, \mu_2)}{V} \sim$$

$$\sim T \left[\xi_1 + \xi_2 - \xi_1^2 B_{11} - \xi_2^2 B_{22} - (\tilde{B}_{12} + \tilde{B}_{21}) \xi_1 \xi_2 - \frac{\ln C}{2V} \right],$$

де $C = \left| \xi_1 B_{11} \xi_2 B_{22} - \xi_1 \tilde{B}_{12} \xi_2 \tilde{B}_{21} \right|$.

За таким математичним формалізмом вдається органічно запровадити закон збереження хімічних потенціалів, які виявляються пов'язаними з умовою, що накладається на підінтегральну функцію при знаходженні сідлової точки, оскільки в термодинамічній границі хімічний потенціал, який визначається умовою екстремуму, збігається з визначенням самого хімічного потенціалу:

$$\mu_i^* \rightarrow \mu_i = \frac{\partial F(V, T, N_i, N_j)}{\partial N_i}, \quad (25)$$

де $F(V, T, N_1, N_2) = -T \ln [Z(V, T, N_1, N_2)]$

визначення вільної енергії (10).

Із визначення щільності легко отримати, що

$$n_i = \partial P(T, \mu_i, \mu_j) / \partial \mu_i \sim \xi_i \left[1 - (2\xi_i + \xi_j (\tilde{B}_{ij} + \tilde{B}_{ji})) \right]. \quad (26)$$

З урахуванням (26) віріальне розкладання (24) можна переписати у вигляді двокомпонентного рівняння ВДВ (у наближенні $b_{ij} N_i N_j / V^2 \ll 1$ і $a_{ij} / (T b_{ij}) \ll 1$):

$$P(T, \mu_1, \mu_2, n_1, n_2) =$$

$$= \frac{T n_1}{1 - b_{11} n_1 - \tilde{b}_{21} n_2} + \frac{T n_2}{1 - b_{22} n_2 - \tilde{b}_{12} n_1} -$$

$$- n_1 (a_{11} n_1 + \tilde{a}_{21} n_2) - n_2 (a_{22} n_2 + \tilde{a}_{12} n_1) + dP,$$
(27)

де dP , згідно з (24), враховує скінченність розмірів фаєрболу.

При виведенні формули (27), як зазвичай (наприклад, [12]), використано $\tilde{B}_{ij} \approx \tilde{b}_{ij} - \tilde{a}_{ij} / T$, а для кожного сорту частинок введено відповідні параметри притягання та відштовхування [11]:

$$a_{ij}, \tilde{a}_{ij} \approx$$

$$\approx \frac{a_{ij} b_{ii}}{(b_{ii} + b_{jj})} - \frac{b_{ij} (b_{ii} a_{ii} + 2b_{ii} a_{jj} - b_{jj} a_{ii})}{(b_{ii} + b_{jj})^2},$$

$$b_{ij}, \tilde{b}_{ij} = \frac{2b_{ii} b_{jj}}{(b_{ii} + b_{jj})}.$$

Асиметрична двокомпонентна модель фрізауту з незбереженням кількості частинок

У ядро-ядерних зіткненнях (A + A), що розглядаються, енергії дуже великі. Вони починаються з енергій, що більші за 1 ГеВ на нуклон. Тому, як зазначалось у Вступі, при цьому народжується багато частинок різних сортів. Як наголошувалося багатьма авторами, на початкових стадіях фрізауту домінують мезони різних сортів. Тому для опису ядро-ядерних взаємодій на початковій стадії фрізауту, а саме вище за поріг народження нових частинок (T > 135 МеВ), нами запропоновано узагальнення моделі ВДВ на ядерний фаєрбол середніх розмірів [16]:

$$\langle V_f \rangle \sim \left(\langle V_f^{\min} + V_f^{\max} \rangle \right) / 2 \sim$$

$$\sim (3/4)\pi \langle a \rangle \langle b \rangle^2 \sim (3/4)\pi r_0^3 \ll A \gg,$$

де $r_0 = 1.1 + 1.2$ фм, $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle$ – середні півосі еліпсоїда; $\ll A \gg$ – масове число ядер, що залишаються у фаєрболі після зіткнення.

Враховуючи, що кількість нуклонів набагато менша за кількість мезонів ($N_n \sim 200 + 300 \ll N_m \sim 4000 + 5000$), припускаємо, що фаєрбол складається майже з одних мезонів. Вкладом інших частинок нехтуємо. Тоді можна додатково ввести такі природні припущення.

1. Розглянемо випадок, коли середні міжнуклонні енергії не перевищують поріг народження важких мезонів, і обмежимося лише двома сортами частинок ("0" – π^0 -мезони, "+" – π^+ -мезони).

2. Накладемо зв'язок на народження π^0 - та π^+ -мезонів. Оскільки реакції народження π^+ -мезонів вдвічі більш ймовірні, ніж реакції народження π^0 -мезонів, вважатимемо, що $n_0 = k n_+ = n$, де $n < 1$, n_0 – щільність π^0 -мезонів, n_+ – щільність π^+ -мезонів. Це відповідає більш ймовірному народженню π^+ -мезонів, ніж π^0 -мезонів, в реакціях $p + d \rightarrow d + n + \pi^+$, $p + d \rightarrow d + p + \pi^0$.

3. Введемо ефективний потенціал мезонної взаємодії $U^{(i,j)}$, де $(i, j) = \{+, 0\}$: "(0+)" – взаємодія π^0 -мезонів

із π^+ -мезонами; “(++)” – взаємодія π^+ -мезонів із π^+ -мезонами; “(00)” – взаємодія π^0 -мезонів із π^0 -мезонами. Маємо:

$$U^{(ij)} = \begin{cases} \infty & \text{if } r < R_i^0 + R_j^0 \\ u_0^{(i,j)} & \text{if } R_i^0 + R_j^0 \leq r < R_i + R_j \\ 0 & \text{if } R_i + R_j \geq r \end{cases} \quad (28)$$

Оскільки ефективний потенціал прямокутної ями приводить приблизно до тих самих значень тиску і щільності, що реальний потенціал (рис. 3, де $U^{(+0)} = U$, $u_0^{(+0)} = \varepsilon$). Тому реальний мезон-мезонний потенціал (а) можна замінити на подібний ефективний прямокутний потенціал (б).

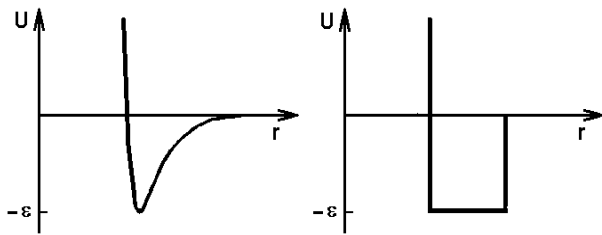


Рисунок 3 – Мезон-мезонний потенціал

4. Радіус твердого кора π^+ -мезона, вважатимемо відомим $R_+^0 = 0,5$ фм. Прийемо, що радіус твердого кора π^0 -мезона набагато менший за радіус π^+ -мезона: $R_0^0 \ll R_+^0$. Тоді, з урахуванням умови $R_2^0 \ll R_1^0 \Rightarrow b_{22} \ll b_{11}$, останній доданок у формулі для тиску (27), що відповідає скінченним розмірам фаєрболу, суттєво спрощується:

$$dP(T, n) \sim - \frac{T}{2 \langle V_f \rangle \ln(b_{22}n)}$$

У рамках запропонованої моделі легко розраховуються середні флуктуації тиску та щільності (як при отриманні формул (18) та (19)):

$$\langle \Delta P \rangle \sim T \sqrt{\frac{n}{\langle V_f \rangle}} [1 + B(Tn)], \quad (29)$$

$$\langle \Delta n \rangle \sim \frac{1}{\langle V_f \rangle \sqrt{n \langle V_f \rangle}} [1 - B(Tn)]. \quad (29')$$

Чисельні результати, що отримані за розробленою моделлю, подано на рис. 4 та рис. 5.

На рис. 4 $T = 142,3$ МеВ, ефективний радіус π^+ -мезону $R_+^0 = 0,5$ фм і π^0 -мезону $R_0^0 = 0,01$ фм, за середнє значення об'єму мезонного фаєрболу взято значення $\langle V_f \rangle \sim 600$ фм³, $k = 0,5$, параметр глибини потенціалу $u_0^{(+,0)} \sim 80 \div 100$ МеВ.

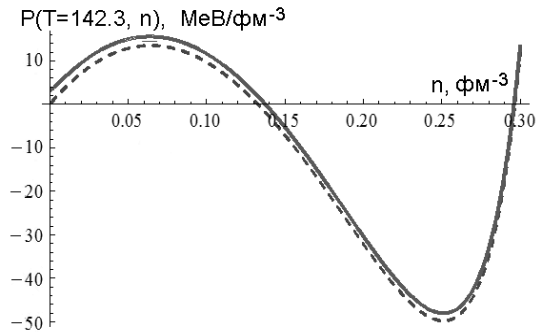


Рисунок 4 – Графік залежності мезонного тиску P (27) від щільності мезонів $n_0 = kn_+ = n$ у двокомпонентній асиметричній моделі ВДВ з поправкою (верхня ізотерма) та без поправки (нижня ізотерма)

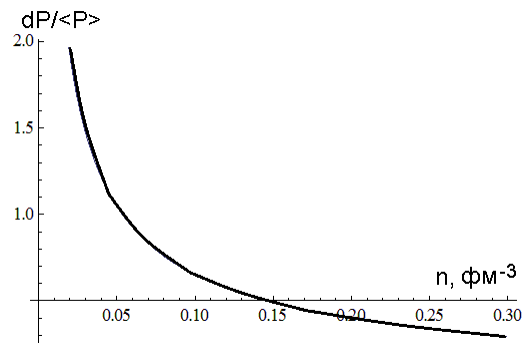


Рисунок 5 – Відношення поправки до тиску $dP/\langle P \rangle$ від розмірів мезонного фаєрболу до величини середньоквадратичної флуктуації тиску $\langle P \rangle$ (29) залежно від щільності мезонів $n_0 = kn_+ = n$

Добре видно (рис. 5) зростання поправки $dP/\langle P \rangle$ при малих щільностях, що є характерним для останніх етапів стадії фрізауту.

Двокомпонентна модель нуклонного фаєрболу на фінальній стадії фрізауту

Середній час життя мезонів, що домінують на початкових стадіях фрізауту, відносно малий ($\tau \sim 10^{-8} \div 10^{-16}$ с). Тому вони досить швидко розпадаються. Отже, на фінальному етапі фрізауту починають домінувати баріони, а саме протони та нейтрони. Крім того, як було показано вище, ефекти від розміру скінченного об'єму стають помітними при досить малих значеннях щільності, що формально відповідають саме таким фінальним стадіям еволюції фаєрболу. Тому, незважаючи на певну сумнівність існування фаєрболу на таких пізніх етапах, коли поступово зникає межа між газом і сукупністю окремих нуклонів, для опису ядро-ядерних взаємодій на останній стадії фрізауту, який нижчий за поріг народження нових частинок ($T < 135$ МеВ), у роботі [14] було запропоновано

узагальнення моделі ВДВ на нуклонний фаєрбол. За аналогією з попереднім розділом прийємо такі спрощення:

1. Розглянемо випадок, коли середні міжнуклонні енергії зіткнень суттєво не перевищують поріг народження інших адронів, і тому можна обмежитися лише двома сортами (“p” – протони, “n” – нейтрони).

2. Зв'язок між щільністю протонів і нейтронів, що впливає із закону збереження баріонного числа $Z + N = A$, прийємо у вигляді $n_p + n_n = n$.

3. Нуклонний склад ядер, що зіштовхуються, вважатимемо відомим і таким, що $n_p = kn_n$, де $k < 1$ (оскільки у важких ядер надлишок нейтронів).

4. Ефективний потенціал протон-нейтронної, протон-протонної та нейтрон-нейтронної взаємодії, що приводить до приблизно тих самих значень тиску та щільності, що і реальний потенціал (рис. 3), представимо за аналогією, як $U^{(i,j)}$ (28), де $(i, j = (p, n))$.

5. Радіус твердого кора протона вважаємо відомим $R_p^0 = 0,5$ фм. Прийємо, що радіус нейтрона набагато менший за радіус протона $R_n^0 \ll R_p^0$.

З рівняння (27) одержуємо:

$$P(T, \mu_1, \mu_2) = \frac{Tn^*(k+1 - \alpha n^*)}{1 - \beta n^* + \gamma(n^*)^2} - a^*(n^*)^2 + dP, \quad (30)$$

де

$$n^* = n/(1+k), \quad k - \text{безрозмірна величина};$$

$$\alpha = b_{11}k + \tilde{b}_{12} + \tilde{b}_{21}k^2 + b_{22}k;$$

$$\beta = b_{11}k + \tilde{b}_{12} + \tilde{b}_{21}k + b_{22};$$

$$\gamma = kb_{11}b_{22} + k^2b_{11}\tilde{b}_{12} + b_{22}\tilde{b}_{21} + \tilde{b}_{12}\tilde{b}_{21}k;$$

$$a^* = a_{11}k^2 + (\tilde{a}_{12} + \tilde{a}_{21})k + a_{22}.$$

З умови $R_2^0 \ll R_1^0$ впливає, що $b_{22} \ll b_{11}$, $\alpha \cong \beta$. Тоді остаточно отримуємо значення поправки до тиску:

$$P(T, \mu_1, \mu_2) \approx Tn^* \left(1 + \frac{k}{1 - \beta n^*} \right) - a^*(n^*)^2 - n^* \frac{T}{A} \ln(b_{22}n^*),$$

а також за аналогією до формул (18) та (19) відповідні середні флуктуації тиску та щільності.

Аналогічно до рис. 4, 5 на рис. 6 представлені функціональні залежності для тиску, що отримані за формулою (30), та відношення dP до середньоквадратичних флуктуацій тиску.

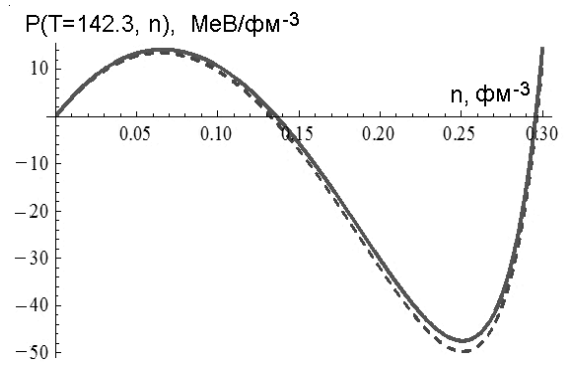


Рисунок 6 – Графік залежності нуклонного тиску P (30) від щільності нуклонів $n_p = kn_n = n$ у двокомпонентній асиметричній моделі ВДВ з поправкою (верхня ізотерма) та без поправки (нижня ізотерма)

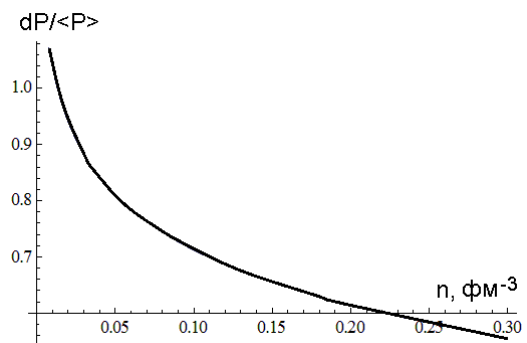


Рисунок 7 – Відношення поправки до тиску dP від розмірів нуклонного фаєрболу до величини середньоквадратичної флуктуації тиску $\langle P \rangle$ залежно від щільності нуклонів $n_p = kn_n = n$

Видно, що хоча поправка dP й у цьому випадку дає ненульовий внесок у загальний тиск, але майже всюди нехтовно мала в порівняно з внеском від флуктуацій. Вона дає порівняний з флуктуаціями внесок лише у нефізичній для ядерного фаєрболу області біля нульової щільності. Але в цій області, як видно з рис. 6, нею можна знехтувати.

Висновки

Проаналізовано вплив урахування виключеного об'єму та притягання в разі двокомпонентного газу: 1) π^0 - та π^+ -мезонів; 2) протонів та нейтронів. Розрахунки були виконані методом перевалу у Канонічному та Великому канонічному ансамблях для двокомпонентної системи. Частинки на малих відстанях взаємодіють з потенціалами твердого кора та відносно великими потенціалами на більших відстанях (ефективних радіусах притягання). Для притягання цього випадку отримано рівняння стану з поправками, що враховують скінченні розміри ядерного фаєрболу та середньоквадратичні флуктуації тиску та щільності.

Методом перевалу в статистичному інтегралі Великого канонічного ансамблю отримано аналітичну поправку до тиску в двокомпонентній моделі Ван-дер-Ваальса з урахуванням притягання та скінченних розмірів статистичної системи. Поправка до тиску зникає на термодинамічній границі, де, згідно зі статистичною фізикою, немає різниці між різними статистичними ансамблями.

Отримано методом сідлових точок формулу для тиску з прозорим нерелятивістським обмеженням, яке обумовлено збереженням баріонного числа різних газових компонентів, таких як нейтрони та протони ядерної речовини. Ця формула може бути використана для аналізу експериментальних даних щодо відносної кількості виходу частинок різних сортів і критичних параметрів при ядро-ядерних зіткненнях за високих енергій. Як приклад такого використання було запропоновано узагальнення представленої моделі ВДВ на асиметричний випадок двокомпонентної моделі (π^0 – та π^+ – мезони)

з реалістичними параметрами твердого кора та притягання. У разі асиметричної двокомпонентної моделі мезонного фаєрболу оцінено відношення поправки до тиску до величини середньоквадратичної флуктуації тиску. Знайдено збільшення поправки при малих значеннях щільності, що відповідає фінальним етапам стадії фрізауту.

Отримано, що внесок у тиск і відносні флуктуації з урахуванням різних радіусів та скінченності ядерного фаєрболу є помітним у випадку мезонної моделі з незбереженням кількості частинок. Проте для фінальних стадій фрізауту, коли починають домінувати нуклони, цією поправкою можна знехтувати. Тому розроблена модель може бути застосована під час аналізу експериментальних даних з вивчення початкової мезонної фази ядерного фаєрболу, яка виникає, зокрема, у дослідах з дослідження кварк-глюонної плазми.

Список літератури

1. Stachel J., Heidelberg U. Tests of thermalization in relativistic nucleus nucleus collisions. *Nucl. Phys. A*, 1996. P. 509–522.
2. Braun-Munzinger P., Stachel J. Dynamics of ultra-relativistic nuclear collisions with heavy beams: An experimental overview. *Nucl. Phys. A*. 1998. P. 3–18.
3. Cleymans J., Satz H. Thermal Hadron Production in High Energy Heavy Ion Collisions. *Z. Phys*, 1993. С. 135–143.
4. Cleymans J., Redlich K., Satz H., Suhonen E. The hadronisation of a quark-gluon plasma. *Z. Phys*, 1993. С. 347–355.
5. Redlich K., Cleymans J., Satz H., Suhonen E. Hadronisation of quark-gluon plasma. *Nuclear Physics A*, 1994, 391–394.
6. Braun-Munzinger P., Stachel J., Wessels J. P., Xu N. Thermal equilibration and expansion in nucleus-nucleus collisions at the AGS. *Phys. Lett. B*, 1995. P. 43–48.
7. Braun-Munzinger P., Stachel J., Wessels J. P., Xu N. Thermal and hadrochemical equilibration in nucleus-nucleus collisions at the SPS. *Phys. Lett. B*, 1996. P. 1–6.
8. Ritchie R. A., Gorenstein M. I., Miller H. G. The excluded volume hadron gas model and pion production at the SPS. *Z. Phys*, 1997. 75. P. 535–538.
9. Yen G. D., Gorenstein M. I., Greiner W., Yang S. N. Excluded volume hadron gas model for particle number ratios in A+A collisions. *Phys. Rev*, 1997. 56, 2210.
10. Yen G. D., Gorenstein M. I., et al. Chemical freezeout in relativistic A+A collisions: is it close to the quark-gluon plasma? *J. Phys. G*. 1998. 24. 1777.
11. Gorenstein M. I., Kostyuk A. P., Krivenko Ya. D. Van der Waals excluded-volume model of multicomponent hadron gas. *J. Phys. G*, 1999. 25. P. 75–83.
12. Krivenko-Emetov Ya. D. Attractive inter-particle force in van der Waals model of multicomponent hadron gas in the grand canonical ensemble. *arXiv:1909.08441v1 [hep-ph]. 18 Sep 2019*; Krivenko-Emetov Ya. D. *Book of abstract of 24th annual scientific conference of Inst. for Nucl. Research*. Kyiv, April 10-13 2017. P. 36.
13. Vovchenko V., Gorenstein M. I. et al. Multicomponent van der Waals equation of state: Applications in nuclear and hadronic physics. *Phys. Rev*. 2017, 96. DOI: 10.1103/PhysRevC.96.045202
14. Krivenko-Emetov Ya. D. *Book of abstract of 28th annual scientific conference of Inst. for Nucl. Research*. Kyiv, Sept. 27 – Oct. 01 2021 P. 27–28.; Коталевич В. В., Кривенко-Еметов Я. Д. Врахування скінченності ядерного фаєрболу у двокомпонентній моделі Ван-дер-Ваальса з притяганням між нуклонами. *Актуальні питання сучасної фізики*. Київ: КПІ ВПК ПОЛІТЕХНІКА, 2020. С. 34-36.
15. Modeling Relativistic Heavy Ion Collisions. URL: <https://www.phy.duke.edu/modelingrelativistic-heavy-ion-collisions> (дата звернення: 17.01.2017)
16. Соколюк Д., Кривенко-Еметов Я. Двокомпонентна модель Ван-дер-Ваальсу ядерного фаєрболу у стадії охолодження (фрізауту) *Теоретичні і прикладні проблеми фізики, математики та інформатики*: матеріали XX Всеукр. наук.-практ. конф. студентів, аспірантів та молодих вчених, м. Київ, 15 червня 2022 р. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, Вид-во: Політехніка, С. 88–93.

17. Landau L. D., Lifshitz E. M. Statistical Physics. Vol. 5 of Course of Theoretical Physics. 2 ed. Addison Wesley, 1969. 484 p.
18. Кубо Р. Статистическая механика. Москва: Мир, 1967. 452 с.
19. Feynman R. P. Statistical Mechanics: a set of lectures. Advanced Book Classics, 2 ed. Perseus Books, Reading, Mass., 1998. 354 p.
20. Федорченко А. М. Теоретична фізика. Т. 2. Квантова механіка, термодинаміка і статистична фізика. Київ: Вища школа, 1993. 415 с.
21. Федорюк М. В. Метод перевала. Москва, 1977. 368 с.

Стаття надійшла до редколегії 25.09.2022

Krivenko-Emetov Yaroslav

PhD (Physico-Mathematical Sciences), Associate Professor of the Applied Physics Department,

<https://orcid.org/0000-0001-8017-3638>

National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv

Institute for Nuclear Research of the National Academy of Science of Ukraine, Kyiv

TWO-COMPONENT STATISTICAL MODEL OF A NUCLEAR FIREBALL IN THE COOLING STAGE (FREEZEOUT)

Abstract. The saddle point method is applied to the statistical integral of the Grand Canonical Ensemble for the cases of one-component and two-component van der Waals gas. This made it possible to obtain the state equation and corrections to the pressure and density of the final statistical system. These contributions, taking into account the realistic effective potential, make it possible to take into account the finite dimensions of the system and, as expected, can be used, in particular, in the case of a nuclear fireball that occurs in high-energy nucleus-nucleus collisions. The corrections depending on the size of the system were compared with the corresponding fluctuations. These corrections become insignificant at the thermodynamic boundary, where, according to statistical physics, the difference between the observed thermodynamic quantities obtained in different statistical ensembles disappears. Taking into account modern estimates of the sizes of mesons and nucleons, as well as realistic estimates for the potentials of their effective interactions, formulas for pressure with a transparent nonrelativistic constraint are obtained. It is expected that they can be used to analyze experimental data on the quantitative characteristics of the yield of particles of various types in the final state from the final stages of the freezeout and to determine the critical parameters of the system in high-energy nucleus-nucleus collisions.

Keywords: fireball; freezeout; van der Waals equation; effective nuclear capability; Grand Canonical Ensemble; pressure fluctuation; quark-gluon plasma; experimental data

References

1. Stachel, J., Heidelberg, U. (1996). Tests of thermalization in relativistic nucleus nucleus collisions. *Nucl. Phys. A.*, 610, 509–522.
2. Braun-Munzinger, P., Stachel, J. (1998). Dynamics of ultra-relativistic nuclear collisions with heavy beams: An experimental overview. *Nucl. Phys. A.*, 638, 3–18.
3. Cleymans, J., Satz, H. (1993). Thermal Hadron Production in High Energy Heavy Ion Collisions. *Z. Phys.*, 57, 135–143.
4. Cleymans, J., Redlich, K., Satz, H. & Suhonen, E. (1993). The hadronisation of a quark-gluon plasma. *Z. Phys.*, 58, 347–355.
5. Redlich, K., Cleymans, J., Satz, H., & Suhonen, E. (1994). Hadronisation of quark-gluon plasma. *Nuclear Physics A.*, 391–394.
6. Braun-Munzinger, P., Stachel, J., Wessels, J.P. & Xu, N. (1995). Thermal equilibration and expansion in nucleus-nucleus collisions at the AGS. *Phys. Lett., B*, 43–48.
7. Braun-Munzinger, P., Stachel, J., Wessels, J. P. & Xu, N. (1996). Thermal and hadrochemical equilibration in nucleus-nucleus collisions at the SPS. *Phys. Lett., B.*, 365, 1–6.
8. Ritchie, R. A., Gorenstein, M. I., Miller, H. G. (1997). The excluded volume hadron gas model and pion production at the SPS. *Z. Phys.*, 75, 535–538.
9. Yen, G. D., Gorenstein, M. I., Greiner, W., Yang, S. N. (1997). Excluded volume hadron gas model for particle number ratios in A+A collisions. *Phys. Rev. C.*, 56, 2210.
10. Yen, G. D., Gorenstein, M. I., at al. (1998). Chemical freezeout in relativistic A+A collisions: is it close to the quark-gluon plasma? *J. Phys. G.*, 24, 1777.
11. Gorenstein, M. I., Kostyuk, A. P., Krivenko, Ya. D. (1999). Van der Waals excluded-volume model of multicomponent hadron gas. *J. Phys. G.*, 25, 75–83.

12. Krivenko-Emetov, Ya. D. (2019). Attractive inter-particle force in van der Waals model of multicomponent hadron gas in the grand canonical ensemble. *arXiv:1909.08441v1 [hep-ph]*. 18 Sep 2019; Krivenko-Emetov Ya. D. (2017). *Book of abstract of 24th annual scientific conference of Inst. for Nucl. Research*. Kyiv, April 10-13 2017, P. 36.
 13. Vovchenko, V., Gorenstein, M. I. et al. (2017). Multicomponent van der Waals equation of state: Applications in nuclear and hadronic physics. *Phys. Rev. C.*, 96, 045202
 14. Krivenko-Emetov, Ya. D. (2021). *Book of abstract of 28th annual scientific conference of Inst. for Nucl. Research*. Kyiv, Sept. 27 – Oct. 01 2021 P. 27–28; Kotalevych V. V., Krivenko-Emetov Ya. D. (2020). Taking into account the finiteness of the nuclear fireball in the two-component van der Waals model with attraction between nucleons. *Topical issues of modern physics*. Kyiv : KPI Polytechnic, 34–36. [in Ukrainian].
 15. Modeling Relativistic Heavy Ion Collisions. URL: <https://www.phy.duke.edu/modelingrelativistic-heavy-ion-collisions> (accessed on 17.01.2017).
 16. Sokolyuk, D., Krivenko-Emetov, Ya. (2022). Two-component van der Waals model of a nuclear fireball in the cooling stage (freezeout). *Theoretical and applied problems of physics, mathematics and informatics: materials of XX All-Ukrainian science and practice conf. students, postgraduates and young scientists*, Kyiv, June 15, 2022. Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, 88–93. [in Ukrainian].
 17. Landau, L. D., Lifshitz, E. M. (1969). *Statistical Physics Vol. 5 of Course of Theoretical Physics*. 2 ed. Addison Wesley, 484.
 18. Kubo, R. (1967). *Statistical mechanics*. Moscow: Mir, 452. [in Russian]
 19. Feynman, R. P. (1998). *Statistical Mechanics: a set of lectures*. Advanced Book Classics, 2 ed. Perseus Books, Reading, Mass, 354.
 20. Fedorchenko, A. M. (1993). *Theoretical physics. T. 2. Quantum mechanics, thermodynamics and statistical physics*. Kyiv: Vyshcha shkola, 415. [in Ukrainian].
 21. Fedoruk, M. V. (1977). *Saddle point method*. Moscow, 368. [in Russian].
-

Посилання на публікацію

- APA Krivenko-Emetov, Yaroslav. (2022). Two-component statistical model of a nuclear fireball in the cooling stage (freezeout). *Management of Development of Complex Systems*, 51, 130–140, [dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2022.51.130-140](https://doi.org/10.32347/2412-9933.2022.51.130-140).
- ДСТУ Кривенко-Еметов Я. Д. Двокомпонентна статистична модель ядерного фаєрболу в стадії охолодження (фрізауту). *Управління розвитком складних систем*. Київ, 2022. № 51. С. 130 – 140, [dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2022.51.130-140](https://doi.org/10.32347/2412-9933.2022.51.130-140).