DOI: 10.32347/2412-9933.2022.52.47-53
УДК 539.3

Кривенко Ольга Петрівна
Кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник НДІ будівельної механіки, *https://orcid.org/0000-0002-1623-9679*
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ
Лізунов Петро Петрович
Доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри будівельної механіки,
https://orcid.org/0000-0003-2924-3025
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ
Ворона Юрій Володимирович
Кандидат технічних наук, доцент, завідувач відділу НДІ будівельної механіки,
https://orcid.org/0000-0001-8130-7204
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК ЛІНІЙНО-ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

Анотація. *Одним із способів підвищення загальної жорсткості оболонкової конструкції є проєктування оболонок зі змінною товщиною. Вплив на стійкість гнучких пологих панелей змінності товщини мало вивчений через складність розв'язування подібних нелінійних задач. Досліджується геометрично нелінійне деформування, стійкість та закритична поведінка тонких пружних оболонок лінійно-змінної товщини, що перебувають під дією рівномірного нормального тиску. Порівнюється поведінка пологих осесиметричних сферичних панелей при трьох законах розподілу товщини за меридіаном оболонки. Виявлено раціональніший розподіл матеріалу в об'ємі оболонки з точки зору стійкості конструкції. Одна й та ж маса матеріалу буде використана раціональніше, якщо потовщення оболонки виконувати в її центральній частині. Методика розрахунку базується на геометрично нелінійних співвідношеннях тривимірної теорії термопружності без застосування спрощуючих гіпотез теорії оболонок, використанні моментної схеми скінченних елементів і застосуванні універсального просторового скінченного елемента. Універсальний скінченний елемент дає змогу моделювати ділянки оболонки як ступінчасто-змінної, так і гладко-змінної товщини, а також оболонки з іншими геометричними особливостями. Задача нелінійного деформування, втрати стійкості та закритичної поведінки розв'язується комбінованим алгоритмом, який поєднує кроковий метод продовження розв'язку за параметром, модифікований метод Ньютона – Канторовича та процедуру автоматичного корегування параметрів алгоритму. Результати розрахунків, що виконані за моментною схемою скінченних елементів, порівнюються з розв'язками, що отримані за допомогою програмних комплексів ЛІРА та SCAD.*

Ключові слова: оболонка; змінна товщина; геометрично нелінійне деформування; стійкість; закритична поведінка; моментна схема скінченних елементів; порівняльний аналіз

Вступ

Задачі стійкості для гладких пологих осесиметричних панелей є класичними в геометрично нелінійній теорії оболонок. На цьому типі оболонок, здебільшого сталої товщини, досліджуються та тестуються нелінійні задачі, методи й алгоритми їх розв'язування. Цим питанням присвячена численна література, наприклад [1 – 6]. Для підвищення несучої спроможності гладких оболонок проєктувальники мають можливість збільшити різними способами загальну жорсткість усієї конструкції за рахунок раціональнішого розподілу матеріалу (маси) в об'ємі оболонки. Одним із таких прийомів є проєктування оболонок зі змінною товщиною. Проте присутність змінної товщини обшивки ускладнює розробку в теорії оболонок методів розрахунку нелінійного деформування та стійкості, навіть якщо оболонка має просту канонічну форму [5]. Тому вплив змінної товщини обшивки гнучкої оболонки на її стійкість є мало дослідженим [1; 2; 5]. Це пояснюється ускладненнями, які вносить змінна товщина в розробку геометрично нелінійних методів розрахунку на стійкість оболонок.

Робота присвячена дослідженню впливу законів розподілу гладко-змінної товщини за меридіаном оболонки на геометрично нелінійне деформування

© О. П. Кривенко, П. П. Лізунов, Ю. В. Ворона

та втрату стійкості конструкції і аналізу раціональнішого розподілу матеріалу в об'ємі конструкції за рахунок заміни сталої товщини оболонки на змінну.

Метод дослідження

Розрахунки оболонок як систем із ускладненою структурою викликають як обчислювальні, так і складні методичні проблеми. Сучасний розвиток обчислювальної техніки стимулює розроблення нових уточнених методів дослідження оболонок, які мають ширше коло використання, ніж традиційні методи розрахунку окремих класів оболонок. Найбільш успішно цю проблему можна вирішити методом скінченних елементів. Робота присвячена аналізу геометрично-нелінійного деформування, стійкості та закритичної поведінки тонких оболонок гладко-змінної товщини. Результати розрахунку одержані за уточненою скінченно-елементною методикою дослідження нелінійного деформування та статичної стійкості тонких пружних оболонок неоднорідної структури при дії силових та температурних навантажень [1]. Метод розроблений на основі єдиних методологічних позицій тривимірної теорії термопружності та застосуванні моментної схеми скінченних елементів (МССЕ). Скінченно-елементне моделювання оболонки виконується за допомогою універсального просторового скінченного елемента з додатковими змінними параметрами. Достовірність методики [1] обґрунтована шляхом дослідження збіжності та точності лінійних і нелінійних розв'язків для різних класів неоднорідних оболонок, а також порівняннями з наявними в літературі результатами. Розроблена методика реалізована як обчислювальний комплекс наукової спрямованості.

Постановка задачі та аналіз результатів розрахунку

З метою пошуку більш раціональних законів розподілу товщини в оболонці (з точки зору витрати матеріалу) в роботах [1; 7] проведено аналіз впливу різних за меридіаном законів лінійної зміни товщини на стійкість оболонок. Пошук ефективних форм та оцінка способів підвищення несучої спроможності оболонок виконувалися на прикладі осесиметричних сферичних панелей, що жорстко затиснуті за контуром та навантажені рівномірним нормальним тиском інтенсивністю q (рис. 1). Взято такі вихідні дані [5]: стріла підйому $H = 0.05\,м$, радіус опорного контуру $a = 1\,м$, радіус серединної поверхні $R = 10.025\,м$, "базова" товщина $h^* = 0.01\,м$, параметр пологості панелі $k = H/h^* = 5$, модуль пружності $E = 19.6 \cdot 10^4$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$. Результати розрахунків подані з використанням безрозмірних параметрів $\bar{q} = q/E\cdot\left(a/h^*\right)^4$ та $\bar{u}^{1'} = u^{1'}/h^*$, де $u^{1'}$ – прогин центра панелі в декартовій системі координат $x^{i'}$.

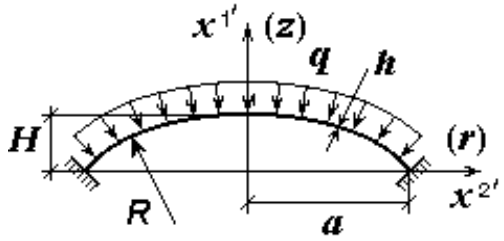

Рисунок 1 - Сферична панель

Закон лінійного розподілу товщини вздовж меридіана панелі у загальному вигляді може бути поданим через два визначальні параметри: товщини панелі в центрі $h_{\bar{r}=0}$ та на контурі $h_{\bar{r}=1}$, а саме:

$$h(\bar{r}) = h_{\bar{r}=0} + (h_{\bar{r}=1} - h_{\bar{r}=0})\bar{r}, \qquad (1)$$

де $\bar{r} = r/a$, r – радіальна координата точки панелі у плані.

Визначення раціонального розподілу матеріалу було виконано при порівнянні між собою трьох способів зміни товщини оболонки. У першому способі товщина панелі в центрі (полюсі) була зафіксована ($h_{\bar{r}=0} = h^*$), а товщина на контурі ($h_{\bar{r}=1} = b_o$) змінювалася (рис. 2, *а*). На рисунку цей випадок має позначки: ⋈ ⊷. У другому способі, навпаки, товщина панелі в центрі ($h_{\bar{r}=0} = h_a$) змінювалася, а товщина на контурі ($h_{\bar{r}=1} = h^*$) була зафіксована (рис. 2, *б*, ⬢ ⊷). У третьому – товщина була різною сталою (▬ , рис. 2, *в*). Порівнювалась поведінка оболонок однакового об'єму V при відповідних законах зміни товщини.

Проведені дослідження стійкості та закритичної поведінки цих панелей та аналіз діаграм "навантаження – прогин" (рис. 2) дали змогу визначити верхню та нижню межі зміни об'єму V оболонки:

$$V_{min} \le V \le V_{max}. \qquad (2)$$

Величини максимального V_{max} та мінімального V_{min} об'ємів визначалися з умови зникнення явища втрати стійкості для панелей з першим і другим варіантами лінійної зміни товщини. Мінімальний об'єм оболонки $V_{min} = 0.02205\,\text{м}^3$ визначено в другому варіанті зміни товщини при $b_a = 0.1$. Цьому ж об'єму відповідає оболонка з першим законом зміни товщини при $b_o = 0.55$. Максимальний об'єм $V_{max} = 0.06274\,\text{м}^3$ визначено з першого варіанта зміни товщини при $b_o = 2.5$. Цей же об'єм має

оболонка з другим законом при $b_a = 4$. Згідно з отриманими значеннями V_{min} та V_{max} визначено межі зміни сталої товщини панелі в третьому варіанті – 0.00701 м $\le h_V \le$ 0.01994 м.

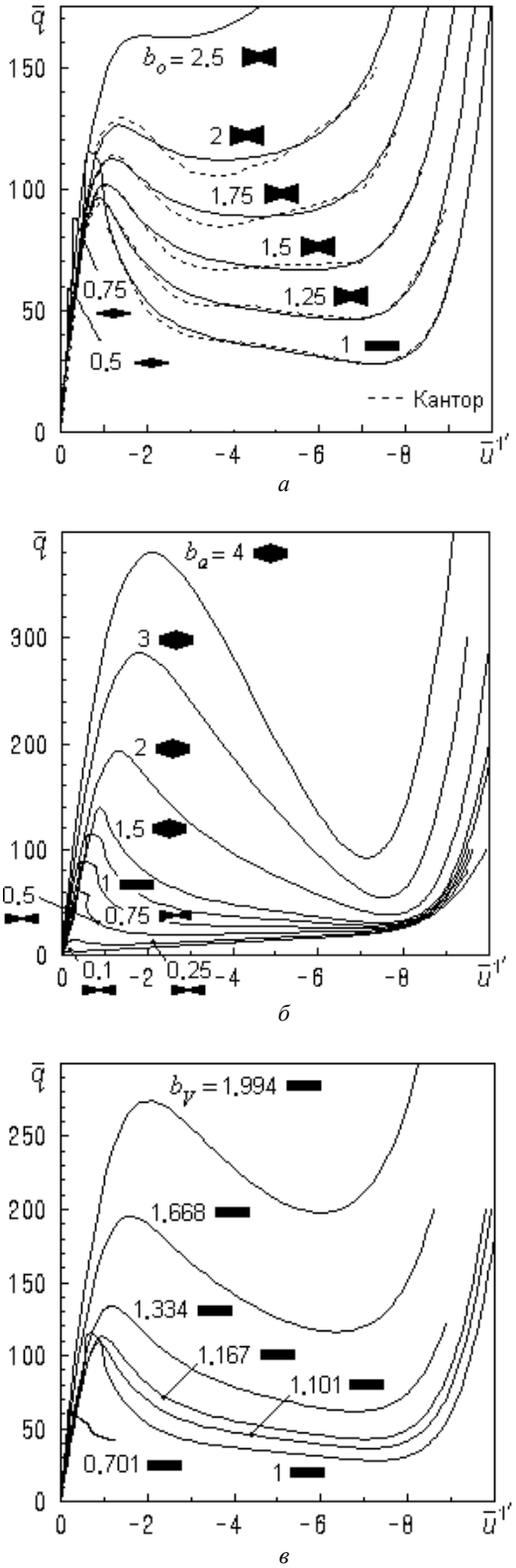

Рисунок 2 – Діаграми "навантаження – прогин" у центрі сферичної панелі для трьох законів зміни товщини

Оскільки "базова" товщина панелі h^* при $b_o = b_a = b_V = 1$ одночасно відповідає трьом законам розподілу товщини, тому цю товщину і відповідний їй об'єм панелі V^* зручно використати для порівняльного аналізу та наведення отриманих результатів. Графічне подання трьох функцій розподілу товщини для оболонок об'ємом $V_{\min}$, V^*, V_{max} зображено на рис. 3.

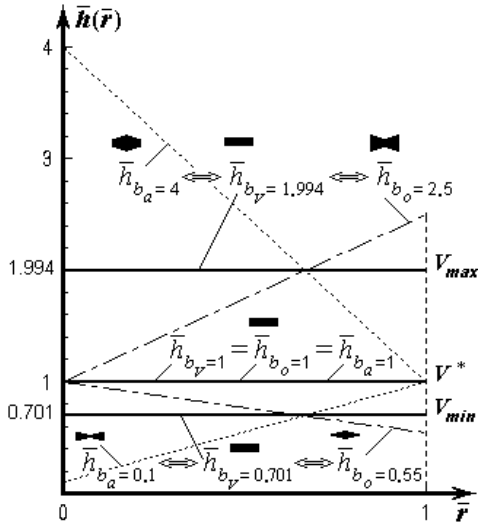

Рисунок 3 – Графічне зображення трьох функцій розподілу товщини

Для визначення раціонального способу розподілу матеріалу в об'ємі оболонки проаналізовано величини верхнього критичного навантаження для трьох законів зміни товщини [1; 7]. Для зручності ці залежності подано на рис. 4 як відносні величини, де об'єм оболонок подано в долях об'єму "базової" оболонки $V^* = V_{(b_V=1)}$, а верхнє критичне навантаження – як частина від верхнього критичного навантаження цієї оболонки $q^{*в}_{кр} = q^{в}_{кр(b_V=1)}$:

$$\tilde{V} = V/V^*, \qquad \tilde{q}^{в}_{кр} = q^{в}_{кр}/q^{в*}_{кр}. \tag{3}$$

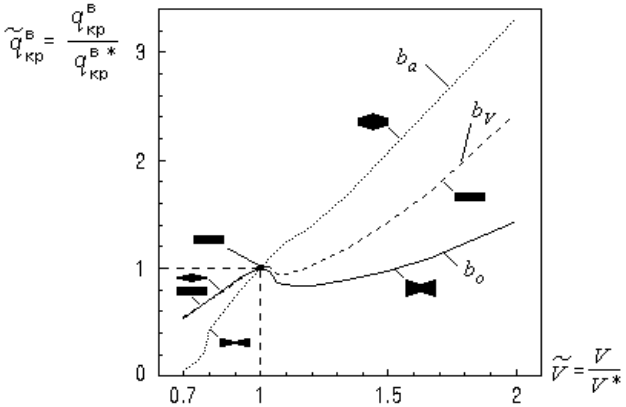

Рисунок 4 – Залежності відносних величин "критичне навантаження – об'єм"

На ділянці меншого за V^* об'єму оболонки $(0.7 \le \tilde{V} \le 1)$ ефективнішими є стала товщина третього закону та лінійно-змінна товщина першого закону. На ділянці більшого за V^* об'єму ($1 \le \tilde{V} \le 2$) ефективнішою є лінійно-змінна товщина другого закону. Отже, одна й та ж маса матеріалу буде використана раціональніше, якщо потовщення оболонки виконувати в її центральній частині.

Виявлено нелінійну залежність величини верхнього критичного навантаження $\tilde{q}^{в}_{кр}$ від параметрів b_o та b_V. Наявність трьох характерних ділянок збільшення та зменшення величини $\tilde{q}^{в}_{кр}$ пояснюється еволюцією форми втрати стійкості оболонки при збільшенні параметрів b_o та b_V (рис. 5 та рис. 7).

На першій ділянці оболонок з параметром товщини b_o $(0 < b_o < 0.5)$ найбільш деформована частина панелі (вм'ятина) зміщується від краю до центра (рис. 5). При цьому деформування у центральній частині оболонки менше ніж у вм'ятині. На другій ділянці $(0.5 \le b_o < 1.2)$ відбувається перебудова форм деформування та втрати стійкості – вм'ятина з периферії переходить до центра оболонки, який починає відчутно просідати. Це і є причиною падіння величини $\tilde{q}^{в}_{кр}$ на цій ділянці. На третій ділянці $(1.2 \le b_o \le 2.5)$ вм'ятина локалізується в центрі оболонки і стає постійним місцем проклацування. При цьому прогини центральної частини збільшуються, а прогини на периферії зменшуються.

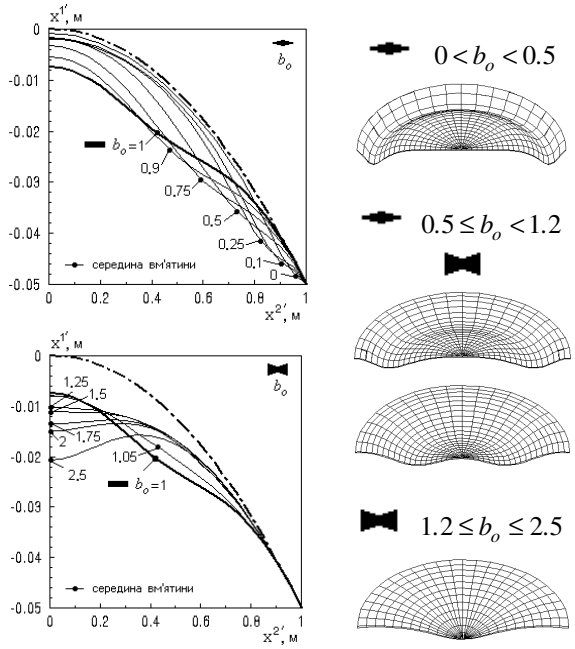

Рисунок 5 – Еволюція форм деформування панелей змінної товщини за першим законом (b_o)

Тому починає стабільно збільшуватись величина $\tilde{q}^{в}_{кр}$. Такий процес відбувається доти, поки жорсткість оболонки за рахунок потовщення периферійної частини не зросте настільки, що стає неможливою втрата стійкості. Для третього способу зміни товщини діаграми "навантаження – прогин" для різних значень параметра b_V (рис. 2, *в*) подібні одна до одної. Як і в першому варіанті, існує аналогічна нелінійна залежність величини $\tilde{q}^{в}_{кр}$ від параметра b_V. Але вона зосереджена на меншій ділянці. Причина падіння $\tilde{q}^{в}_{кр}$ в межах $1.05 \le b_V < 1.167$ також пов'язана з еволюцією форми втрати стійкості (рис. 6).

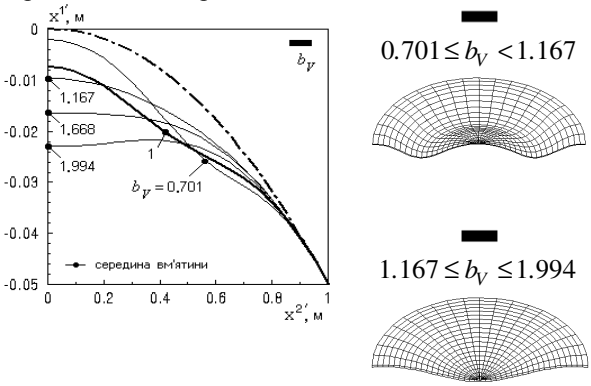

Рисунок 6 – Еволюція форм деформування панелей змінної товщини за третім законом (b_V)

Для панелей з другим законом лінійно-змінної товщини (b_a) характерними є три форми втрати стійкості (рис. 7). На першій ділянці $(0.1 \le b_a < 0.4)$ відбувається проклацування лише незначної площі центральної частини оболонки. На другій ділянці $(0.4 \le b_a < 1.25)$ вм'ятина утворюється посередині меридіану. На третій ділянці $(1.25 \le b_a \le 4)$ проклацування відбувається в центрі за рахунок просідання значної частини всієї оболонки. Збільшення величини b_a веде до зміщення вм'ятини у зворотному напрямку, на відміну від попередніх випадків, – від центра до краю оболонки.

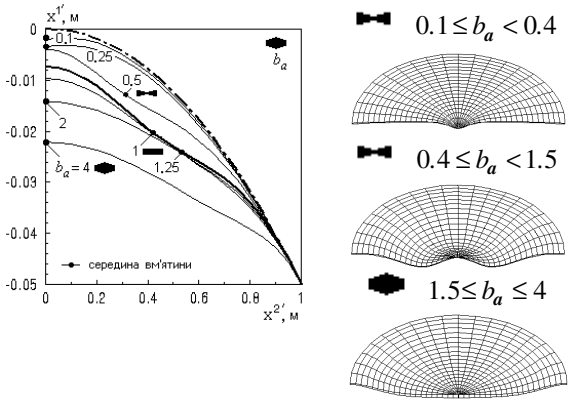

Рисунок 7 – Еволюція форм деформування панелей змінної товщини за другим законом (b_a)

Порівняння з розв'язками, що отримані за ПК ЛІРА ТА SCAD

Для підтвердження достовірності отриманих результатів додатково до порівняння нелінійних розв'язків (рис. 2, *а*), отриманих за МССЕ та Б. Я. Кантором [5], були виконані розрахунки розглянутих вище сферичних панелей із застосуванням нелінійних процесорів програмного комплексу (ПК) ЛІРА [8; 9] та SCAD [10; 11]. Для апроксимації гнучких оболонок застосовано оболонкові СЕ сталої товщини, співвідношення для яких отримано на основі теорії пологих оболонок. Панелі лінійно-змінної товщини при розрахунках за МССЕ апроксимувалися скінченно-елементною моделлю лінійно-змінної товщини, а при розрахунках за ПК ЛІРА та SCAD, як оболонки ступінчасто-змінної товщини [12; 13]. Похибка від застосування в цих ПК наближеної розрахункової схеми компенсувалася використанням достатньо густої сітки 20×20 СЕ.

Порівняння результатів виявляє добрий збіг кривих "навантаження – прогин" у докритичній області та в області верхньої критичної точки для всіх розв'язків (рис. 8).

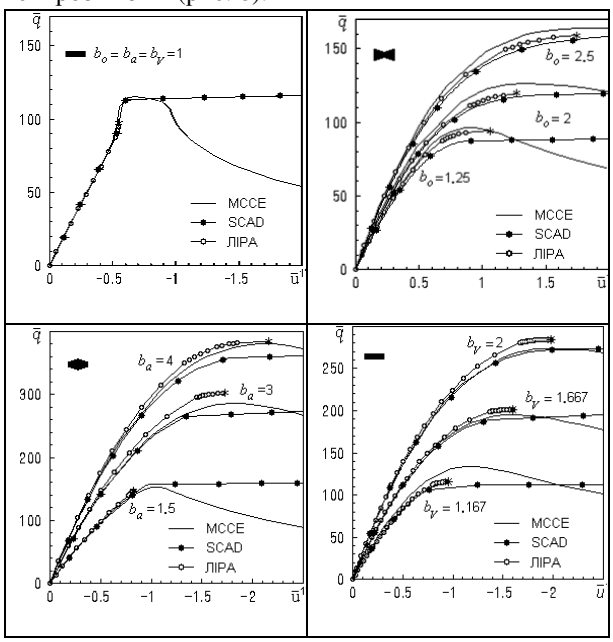

Рисунок 8 – Порівняння результатів кривих «навантаження – прогин»

У нелінійному процесорі ПК ЛІРА розв'язування задачі виконується до моменту виродження матриці системи розв'язувальних рівнянь, який настає або в точці розгалуження, або у верхній критичній точці. В ПК ЛІРА тип цих точок не визначається. Тому точка, в якій вироджується матриця, береться за критичне значення навантаження. На діаграмі, що отримана за ПК ЛІРА, зірочкою "*" позначено момент припинення обчислень. Для розв'язків, що отримані за МССЕ, також виявлено токи розгалуження для панелей з параметрами $b_o = b_a = b_V = 1$ ($\bar{q}^* = 94.4$) та $b_a = 1.5$ ($\bar{q}^* = 151.2$). Для МССЕ і ПК ЛІРА розбіжність у цих точках за величинами навантажень становить відповідно 0.5 і 2.8%. Маємо незначне розходження результатів МССЕ і ПК SCAD в зоні верхнього критичного навантаження $\bar{q}^{в}_{кр}$.

Порівняння форм деформування засвідчило їх добрий збіг для усіх випадків розрахунку. На рис. 9 наведено порівняння перерізів форм деформування для панелей з різними параметрами товщини, що отримані за МССЕ і з використанням ПК ЛІРА. Вихідна форма панелі показана штрих-пунктирною лінією з позначкою $\bar{q} = 0$. Маємо повний збіг форм деформування панелей, що отримані в точці розгалуження $\bar{q}^*$, для панелей з параметрами товщини $b_o = b_a = b_V = 1$ та $b_a = 1.5$ (рис. 9, *а*, *б*). Також спостерігається практично повний збіг форм втрати стійкості оболонок ($\bar{q}^{в}_{кр}$) з різними параметрами b_o та b_a (рис. 9, *в*, *г*). Для розв'язків, що отримані за МССЕ, на рис 9, *а* ($b_a = 1$) та рис. 9, *б* ($b_a = 1.5$), продемонстровано відмінність форм у точці розгалуження ($\bar{q}^*$) та верхній критичній точці(($\bar{q}^{в}_{кр}$). Для панелі сталої товщини ($b_a = 1$) вона виявилась суттєвою: відбулася зміна характеру форми деформування панелі – з'явилася вм'ятина на меридіані.

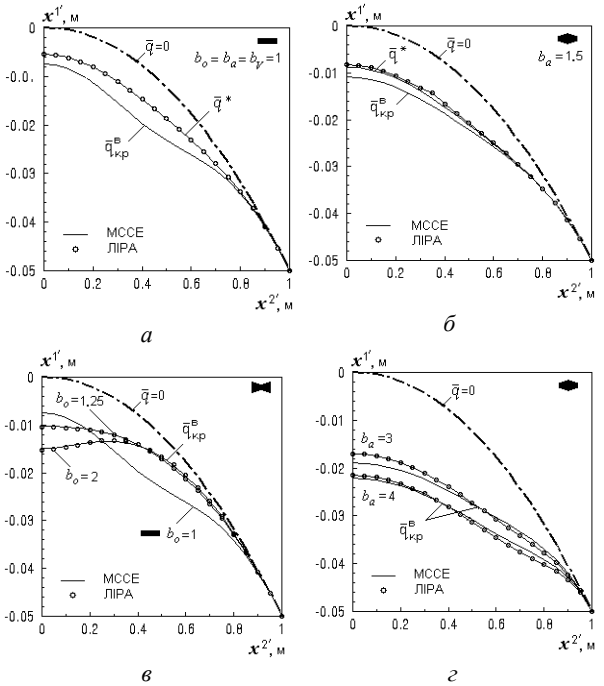

Рисунок 9 – Порівняння перерізів форм деформування для панелей з різними параметрами товщини (за МССЕ, ПК ЛІРА)

Висновки

Метод розв'язування статичних задач геометрично нелінійного деформування, стійкості та закритичної поведінки тонких пружних неоднорідних оболонок застосовано до дослідження гладких пологих сферичних панелей різної лінійно-змінної товщини, що перебувають під дією рівномірно розподіленого нормального тиску. Підхід базується на геометрично нелінійних співвідношеннях тривимірної теорії термопружності, використанні моментної схеми скінченних елементів та універсального просторового скінченного елемента. Проведені дослідження дали змогу виявити та пояснити важливі для практики проєктування нелінійні ефекти еволюції форм деформування та втрати стійкості панелей при їх потовщенні за різними законами лінійно-змінної товщини. Це надало можливість визначити закони раціонального розподілу матеріалу в об'ємі оболонки. Показано, що одна й та ж маса матеріалу буде використана раціональніше, якщо потовщення оболонки виконувати в її центральній частині.

Для розглянутих оболонок змінної товщини проведено дослідження нелінійного деформування та втрати стійкості за допомогою програмних комплексів ЛІРА та SCAD. Порівняння розв'язків, що виконані за МССЕ та в ПК ЛІРА та SCAD, засвідчило практично повний їхній збіг.

Список літератури

1. Баженов В. А., Кривенко О. П., Соловей М. О. Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури: приєднання до руху відкритого доступу. *Київ: ЗАТ «Віпол»*. 2010. 316 с.

2. Валишвили Н. В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. Москва: Машиностроение, 1976. 278 с.

3. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. Москва: Наука, 1967. 984 с.

4. Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. Москва: Наука, 1978. 360 с.

5. Кантор Б. Я. Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек. Київ: Наукова думка, 1974. 136 с.

6. Чеботаревский Ю. В., Крысько В. А. Механика оболочек и пластин в XXI веке: Межвуз. науч. сб. Саратов: СГТУ, 1999. 194 с.

7. Баженов В. А., Соловей Н. А., Кривенко О. П. Устойчивость пологих оболочек вращения линейно-переменной толщины. *Авиационно-космическая техника и технология*. 2004. N 2 (10). С. 18–25.

8. Городецкий А. С., Евзеров И. Д. Компьютерные модели конструкций. Киев: Факт. 2007. 394 с.

9. Стрелец-Стрелецкий Е. Б. и др. ЛИРА 9.4. Руководство пользователя. Основы: учеб. пособие. Киев: Факт. 2008. 164 с.

10. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. Москва: ДМК Пресс, 2007. 600 с.

11. Карпиловский В. С. и др. SCAD Office. Вычислительный комплекс SCAD. Москва: изд-во «СКАД СОФТ», 2009. 656 с.

12. Krivenko O. P., Vorona Yu. V. Comparative analysis of nonlinear deformation and buckling of thin elastic shells of step-variable thickness. Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. 2022. Issue 108. P. 107–118.

13. Bazhenov V .A., Krivenko O .P. Buckling and Natural Vibrations of Thin Elastic Inhomogeneous Shells. *Saarbruken, Deutscland: LAP LAMBERT Academic Publishing*. 2018. 97 p. ISBN: 978-613-9-85790-6.

Стаття надійшла до редколегії 20.12.2022

Krivenko Olga
PhD (Eng.), Senior Researcher, Leading Researcher of the Research Institute of Structural Mechanics,
https://orcid.org/0000-0002-1623-9679
Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv
Lizunov Petro
DSc (Eng.), Professor, Head of the Department of Structural Mechanic, *https://orcid.org/0000-0003-2924-3025*
Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv
Vorona Yurii
PhD (Eng.), Associate Professor, Professor of the Department of Structural Mechanic,
https://orcid.org/0000-0001-8130-7204
Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

BUCKLING ANALYSIS OF SHALLOW SHELLS HAVING LINEAR-VARIABLE THICKNESS

Abstract. *One way to increase the overall stiffness of a shell structure is to design shells with variable thickness. The effect of thickness change on the stability of flexible shallow panels has been little studied due to the complexity of solving such non-linear problems. Geometrically nonlinear deformation, buckling and postbuckling behavior of thin elastic shells of linearly*

variable thickness subjected to uniform normal pressure is investigated. The behavior of shallow axisymmetric spherical panels is compared for three laws of thickness distribution along the meridian of the shell. A more rational distribution of the material in the volume of the shell from the point of view of the stability of the structure is revealed. The same mass of material will be used more rationally if the shell is thickened in its central part. The method is based on geometrically nonlinear equations of the three-dimensional thermoelasticity without the use of simplifying hypotheses of the shell theory, and the use of the moment finite-element scheme and the 3D universal finite element. The universal finite element makes it possible to model sections of the shell with both step-variable and smooth-variable thickness, as well as shells with other geometric features. The problem of nonlinear deformation, buckling, and postbuckling behavior of inhomogeneous shells is solved by a combined algorithm that employs the parameter continuation method, a modified Newton–Kantorovich method, and a procedure for automatic correction of algorithm parameters. The results of calculations performed using the moment finite-element scheme are compared with the solutions obtained using the LIRA and SCAD software packages.

Keywords: shell; variable thicknessж geometrically nonlinear deformation; buckling; postbuckling behavior; moment finite-element scheme; comparing analysis

References

1. Bazhenov, V. A., Krivenko, O. P., Solovei, N. A. (2010). Nonlinear Deformation and Stability of Elastic Inhomogeneous Structure Shells. Kyiv: Vipol, 316. (in Ukrainian).
2. Valishvili, N. V. (1976). Methods for calculating shells of revolution on an electronic computer. Moscow: Mashinostroenie, 278. (in Russian).
3. Volmir, A. S. (1967). Stability of deformable systems. Moscow: Nauka, 984. (in Russian).
4. Grigolyuk, E. I., Kabanov, V. V. (1978). Shell stability. Moscow: Nauka, 360. (in Russian).
5. Kantor, B. Ya. (1974). Nonlinear problems in the theory of inhomogeneous shallow shells. Kyiv: Naukova dumka, 136. (in Russian).
6. Chebotarevsky, Yu. V., Krysko, V. A. (1999). Mechanics of shells and plates in the XXI century: Interuniversity. scientific collection. Saratov: SGTU, 194. (in Russian).
7. Bazhenov, V. A., Solovey, N. A., Krivenko, O. P. (2004). Stability of shallow shells of revolution with linearly variable thickness. *Aerospace engineering and technology,* 2 (10), 18–25. (in Russian).
8. Gorodecriy, A. S., Evzerov, I. D. (2007). Computer models of Structures. Kyiv: Fact, 394. (in Russian).
9. Strelec-Streleckiy, at al. (2008). LIRA 9.4. User Guide. Basis. Textbook. Kyiv: Fact, 164. (in Russian).
10. Perel'muter, A. V., Slivker, V. I. (2007). Design models of structures and possibility of their analysis. Moscow: DMK Press, 600. (in Russian).
11. Karpilovsky, V. S., at al. (2009). SCAD Office. Software SCAD. Moscow: SCAD SOFT, 656. (in Russian).
12. Krivenko, O. P., Vorona, Yu. V. (2022). Comparative analysis of nonlinear deformation and buckling of thin elastic shells of step-variable thickness. *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles,* 108, 107-118.
13. Bazhenov, V. A., Krivenko, O. P. (2018). Buckling and Natural Vibrations of Thin Elastic Inhomogeneous Shells. *Saarbruken, Deutscland: LAP LAMBERT Academic Publishing*, 97. ISBN: 978-613-9-85790-6.

Посилання на публікацію

APA Krivenko, Olga, Lizunov, Petro & Vorona, Yurii. (2022). Buckling analysis of shallow shells having linear-variable thickness. *Management of Development of Complex Systems*, 52, 47–53, dx.doi.org\10.32347/2412-9933.2022.52.47-53.

ДСТУ Кривенко О. П., Лізунов П. П., Ворона Ю. В. Аналіз стійкості пологих оболонок лінійно-змінної товщини. *Управління розвитком складних систем.* Київ, 2022. № 52. С. 47 – 53, dx.doi.org\10.32347/2412-9933.2022.52.47-53.