

**Кривенко Ольга Петрівна**

Кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник НДІ будівельної механіки, <https://orcid.org/0000-0002-1623-9679>

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

**Лізунов Петро Петрович**

Доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри будівельної механіки,

<https://orcid.org/0000-0003-2924-3025>

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

**Ворона Юрій Володимирович**

Кандидат технічних наук, доцент, завідувач відділу НДІ будівельної механіки,

<https://orcid.org/0000-0001-8130-7204>

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

**Калашніков Олександр Борисович**

Молодший науковий співробітник НДІ будівельної механіки,

<https://orcid.org/0009-0009-7825-9809>

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

## ВИКОРИСТАННЯ МОМЕНТНОЇ СХЕМИ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ТОНКИХ ПРУЖНИХ ОБОЛОНОК НЕОДНОРІДНОЇ СТРУКТУРИ

***Анотація.** Робота присвячена проблемі розробки універсального методу дослідження деформування, стійкості, закритичної поведінки та коливань тонких і середньої товщини оболонок складної форми та структури при дії силових і температурних навантажень. Розглянуто широкий клас оболонок: сталі та гладко-змінної товщини, з ребрами і накладками, каналами і виїмками, отворами, зі зламами серединної поверхні, з багатошаровою структурою матеріалу. Методика дослідження базується на геометрично нелінійних співвідношеннях тривимірної теорії термпружності без застосування спрощуючих гіпотез теорії оболонок. Побудова розрахункової моделі ґрунтується на застосуванні універсального ізопараметричного просторового скінченного елемента з полілінійними функціями форми, який є єдиним для всіх ділянок оболонки ступінчасто-змінної товщини. Розв'язувальні співвідношення побудовано відповідно до положень моментної схеми скінчених елементів. За поверхню відліку взято серединну поверхню обшивки оболонки. Для універсального просторового багатошарового скінченного елемента усі матриці розв'язувальних співвідношень отримані в явному вигляді шляхом аналітичного інтегрування. Це прискорює виконання обчислень при алгоритмічній реалізації методу. Такий підхід, заснований на єдиній методології, надає можливість досліджувати поведінку багатошарових оболонок з різними геометричними особливостями за товщиною, що перебувають під дією складного термосилового навантаження.*

***Ключові слова:** оболонка; ступінчасто-змінна товщина; універсальний просторовий скінченний елемент; моментна схема скінчених елементів; геометрично нелінійне деформування; стійкість; закритична поведінка; коливання; термосилове навантаження*

### Вступ

Оболонки, як основні елементи тонкостінних конструкцій, характеризуються своєю легкістю і водночас високою міцністю та несучою здатністю. Це обумовлює їх широке використання в різних галузях техніки і промисловості. Оболонки, що використовуються на практиці, загалом можуть мати складну форму серединної поверхні, яка не описується простими аналітичними виразами,

гладко-змінну та ступінчасто-змінну товщину, гранованість, багатошарову структуру матеріалу тощо. Такі тонкостінні оболонкові елементи прийнято називати: неоднорідними оболонками, оболонками неоднорідної структури, оболонками неоднорідної жорсткості [1]. Оболонки можуть перебувати під дією термосилових навантажень. Своєю чергою, температурні поля можуть викликати істотні деформації в оболонці і бути вирішальним фактором, від якого залежить форма і момент втрати

стійкості конструкції. Тонкостінні оболонкові конструкції деформуються нелінійно. Проблему дослідження геометрично нелінійного деформування, стійкості та коливань тонких оболонок відображено в багатьох публікаціях, детальний огляд яких міститься, наприклад, в роботах [1 – 5].

Отже, при отриманні розв'язувальних рівнянь ребристих оболонок і оболонок з каналами виникають проблеми щодо урахування сумісної роботи елементів різної мірності. Так, у теорії ребристих оболонок застосовуються кілька способів урахування спільної роботи системи обшивки – ребра. Як термін “обшивка” розуміється тіло оболонки без геометричних особливостей за товщиною. Одним із цих способів є заміна оболонки з ребрами на гладку конструктивно-ортотропну оболонку [6]. Такий підхід застосовується у тих випадках, коли ребра мають відносно малу жорсткість і у формах втрати рівноваги півхвиля форми деформування припадає на декілька ребер. У цьому випадку використовуються рівняння анізотропної (ортотропної) теорії оболонок [7]. Більш узагальненим є підхід, який враховує дискретне розташування ребер. За такого підходу оболонка розглядається як обшивка, що підкріплена дискретно розміщеними одномірними пружними елементами (ребрами) [3; 4; 8], або як оболонка ступінчато-змінної товщини [1; 2].

У статті, виходячи з уніфікованого підходу, за якого оболонка розглядається як оболонка ступінчато-змінної товщини [1; 2], наведено основні вихідні параметри і розрахункові співвідношення для задач деформування, стійкості та коливань гнучких пружних оболонок неоднорідної структури, що перебувають під дією статичного термосилового навантаження.

### Мета статті

Метою роботи є побудова ефективного скінченно-елементного методу дослідження деформування, стійкості та коливань пружних оболонок неоднорідної структури при дії силових і температурних навантажень. У статті, виходячи з уніфікованого підходу, при якому оболонка розглядається як оболонка ступінчато-змінної товщини, наведено основні вихідні параметри та розрахункові співвідношення для задач, що вивчаються.

### Виклад основного матеріалу

#### Вихідні співвідношення

Розглядаються статичні задачі аналізу напружено-деформованого стану (НДС), стійкості, закритичної поведінки та власних коливань широкого класу пружних неоднорідних оболонок

при дії зовнішніх силових навантажень і нерівномірного об'ємного нагріву. Розглядаються тонкі оболонки та оболонки середньої товщини. Вони можуть мати гладку та ступінчато-змінну товщину, злами серединної поверхні, підкріплення ребрами та накладками, послаблення отворами, виїмками та каналами, бути гранованими і багатошаровими. Такі ділянки оболонки розглядаються як ділянки неперервно-змінної товщини (із серединною поверхнею гладкою та зі зламами) та ступінчато-змінної товщини (ділянки, на яких розміщені обшивка, ребра, накладки, виїмки, канали, отвори).

Розв'язувальні рівняння для оболонок отримані в тензорній формі на основі геометрично нелінійних співвідношень просторової теорії термопружності. Слідуючи загальним правилам тензорного числення [9], взято: індекси латинського алфавіту приймають значення  $i = \overline{1, 3}$ ; індекси грецького алфавіту приймають значення  $\alpha = \overline{2, 3}$ ; індекси, що належать до декартової системи координат, супроводжуються штрихом ( $k' = \overline{1, 3}$ ); за повторюваними індексами відбувається підсумовування; за індексами, що взяті в дужки, підсумовування не виконується. Співвідношення, що описують НДС оболонки, подаються в місцевій криволінійній  $x^i$  з базисом  $\bar{e}_i = \partial \bar{r} / \partial x^i$  та глобальній декартовій  $x^{k'}$  з базисом  $\bar{e}_{k'} = \partial \bar{r} / \partial x^{k'}$  системах координат. Положення будь-якої матеріальної точки тіла оболонки визначається радіусом-вектором  $\bar{r}$  відповідно у глобальній декартовій та місцевій лагранжевій системах координат:

$$\bar{r} = \bar{r}(x^{k'}) = \bar{r}(x^i). \quad (1)$$

Вважається, що в будь-який момент деформування між глобальною і місцевою системами координат у будь-якій точці оболонки існує однозначний зв'язок, який визначається за допомогою прямого і зворотного тензорів перетворення координат:

$$C_{k'}^i = C^{ik'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}, \quad C_i^{k'} = C_{k'i} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}. \quad (2)$$

Тонка багатошарова оболонка з геометричної точки зору розглядається як тривимірне тіло. Вона складається з довільного числа  $m$  анізотропних шарів, які жорстко поєднані між собою в монолітний пакет без проковзування і відриву. Використовується модель пружного суцільного середовища, що нелінійно деформується. Розглядаються великі переміщення при малих деформаціях. При заданні вектора переміщень  $\bar{u}$  у декартовій системі координат компоненти  $\varepsilon_{ij}$  тензора скінченних деформацій Коші – Гріна мають відносно

переміщень лінійні та нелінійні (підкреслений вираз) складові і визначаються так:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{lin} + \varepsilon_{ij}^{nel} = \frac{1}{2} \left( C_j^{k'} \frac{\partial u^{k'}}{\partial x^i} + C_i^{k'} \frac{\partial u^{k'}}{\partial x^j} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial u^{k'}}{\partial x^j}. \quad (3)$$

Матеріали шарів оболонки вважаються лінійно-пружними, властивості яких відповідають узагальненому закону Дюамеля – Неймана [10]:

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} &= C^{ijkl} \varepsilon_{kl}^e = C^{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^T) = \\ &= C^{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl} T) = \bar{\sigma}^{ij} - \sigma_T^{ij}, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $\varepsilon_{kl}^e$  – компоненти тензора пружних деформацій, поява яких викликана виникненням внутрішніх напружень  $\sigma^{ij}$ ;  $\varepsilon_{kl}$  – компоненти тензора скінченних (повних) деформацій Коші – Гріна;  $\varepsilon_{kl}^T = \alpha_{kl} T$  – компоненти тензора температурних деформацій, виникнення яких обумовлене зміною температури тіла на величину  $T$  по відношенню до його початкової температури  $T_0$ ;  $\bar{\sigma}^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}$ ;  $\sigma_T^{ij} = C^{ijkl} \alpha_{kl} T$  – компоненти тензорів напружень, що залежать від повних і температурних деформацій, відповідно;  $C^{ijkl}$  і  $\alpha_{kl}$  – компоненти тензорів пружних сталей і теплового розширення.

При термосилових навантаженнях деформації (3) є сумою двох різних видів деформацій, і тому вони називаються повними [10; 11]

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}^e + \varepsilon_{kl}^T. \quad (5)$$

Моделювання анізотропних властивостей неоднорідного матеріалу оболонки виконується з використанням у шарах як традиційних моделей матеріалу (ізотропна, трансверсально-ізотропна, ортотропна) [1; 2; 7], так і композитної моделі (односпрямований волокнистий матеріал) [2].

Особливості НДС тонкої неоднорідної оболонки враховані двома неklasичними гіпотезами. Застосована неklasична кінематична гіпотеза прямої, що деформується, – пряма в напрямку товщини, скорочуючись або подовжуючись, залишається прямою і після деформування оболонки. В просторовій скінченно-елементній моделі оболонки (СЕМО) ця пряма спрямована вздовж осі  $x^1$  місцевої системи координат, вона не обов'язково є нормаллю до серединної поверхні оболонки. У напрямку товщини розподіл переміщень взято лінійним, що є загальноприйнятим в теорії тонких оболонок [12]. За статичною гіпотезою напруження обчислення  $\sigma_n^{11}$  волокон шарів оболонки за товщиною взято сталими за товщиною  $n$ -го шару

$$\frac{\partial \sigma_n^{11}}{\partial x^1} = 0. \quad (6)$$

Ця неklasична гіпотеза не позбавляє напружений стан неоднорідної оболонки тривимірних властивостей.

### Універсальний просторовий СЕ та його параметри

Апроксимація оболонки за товщиною виконується одним просторовим ізопараметричним скінченним елементом (СЕ) з полілінійними функціями форми:

$$x^{k'}(x^i) = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \prod_{k=1}^3 \left( s_{(i)} x^{(i)} + \frac{1}{2} \right) x_{s_1 s_2 s_3}^{k'}, \quad (7)$$

$$u^{k'}(x^i) = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \prod_{k=1}^3 \left( s_{(i)} x^{(i)} + \frac{1}{2} \right) u_{s_1 s_2 s_3}^{k'}, \quad (8)$$

де  $s_i = \text{sign}(x_{s_1 s_2 s_3}^i)$  – умовні (сіткові) лагранжеві координати вузлів СЕ (рис. 1);  $x_{s_1 s_2 s_3}^i = \pm \frac{1}{2}$  – місцеві нормалізовані координати вузлів СЕ;  $x_{s_1 s_2 s_3}^{k'}$  – задані (відомі) значення координат;  $u_{s_1 s_2 s_3}^{k'}$  – шукані (невідомі) значення переміщень вузлів СЕ в декартовій системі координат.

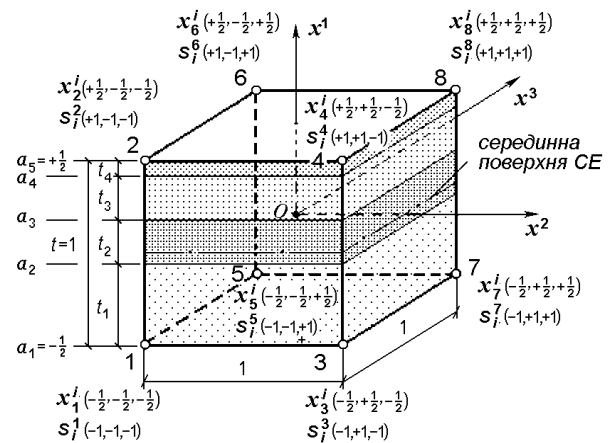


Рисунок 1 – Топологічна модель багатошарового просторового СЕ оболонки

Для моделювання ділянок оболонки ступінчато-змінної товщини розроблено методику, за якою «стандартний» скінченний елемент обшивки («СЕО», рис. 2, а) видозмінюється в скінченний елемент модифікований (СЕМ) і набуває властивостей універсального. Він може бути ексцентрично зміщеним відносно серединної поверхні обшивки і може змінювати свої розміри в напрямку товщини для моделювання ділянок оболонок зі ступінчато-збільшеною товщиною (ребра, накладки) («СЕМ<sup>+</sup>», рис. 2, б) і ділянок оболонок зі ступінчато-зменшеною товщиною (канали, виїмки) («СЕМ<sup>-</sup>», рис. 2, в). Можливості універсального СЕ розширено за рахунок введення додаткових змінних параметрів [1; 2].

Формування геометрії скінченно-елементної моделі оболонки виконується у два етапи. На першому – задаються декартові координати вузлів на обмежуючих поверхнях СЕМО. Утворюються СЕ обшивки, наприклад шестигранник  $ABCDEFGH$ , рис. 2, а. На другому етапі на ділянках ступінчато-змінної товщини координати вузлів СЕО за потребою змінюються вздовж осі на координати вузлів СЕМ (шестигранник  $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}\tilde{E}\tilde{F}\tilde{G}\tilde{H}$ , рис. 2 в, з). Процедура перетворення СЕО в СЕМ зводиться до заміни ребер СЕО ( $AB, CD, EF, GH$ ) на ребра СЕМ ( $\tilde{A}\tilde{B}, \tilde{C}\tilde{D}, \tilde{E}\tilde{F}, \tilde{G}\tilde{H}$ ) зі зміщенням серединної поверхні СЕО вздовж осі  $x^1$  на величину  $S\tilde{S}$  (рис. 3). У результаті

одержуємо ексцентрично розташований СЕМ ступінчато-збільшеної чи ступінчато-зменшеної товщини для моделювання відповідних ділянок оболонки.

Перетворення вузлових координат СЕО у відповідні вузлові координати СЕМ виконується вздовж координатних ліній  $x^1$  СЕО і відповідає прийнятому полілінійному закону розподілу координат у СЕ та гіпотезі деформівної прямої. Геометричні залежності, за якими виконується це перетворення, мають вигляд [1]:

$$\tilde{x}_{s_2s_3}^{k'} = x_{s_2s_3}^{k'} + a_{s_2s_3} t_{s_2s_3}^{k'}, \quad \tilde{t}_{s_2s_3}^{k'} = b_{s_2s_3} t_{s_2s_3}^{k'}, \quad (9)$$

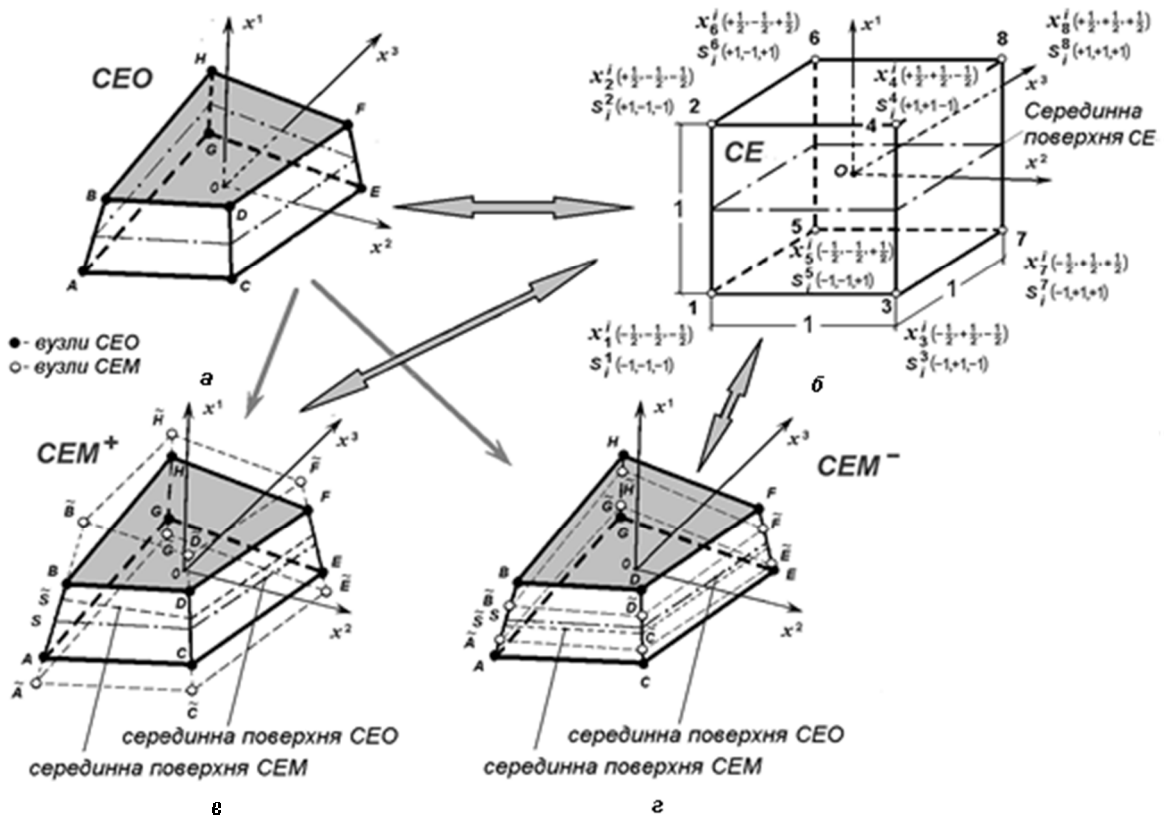


Рисунок 2 – Універсальний просторовий скінченний елемент

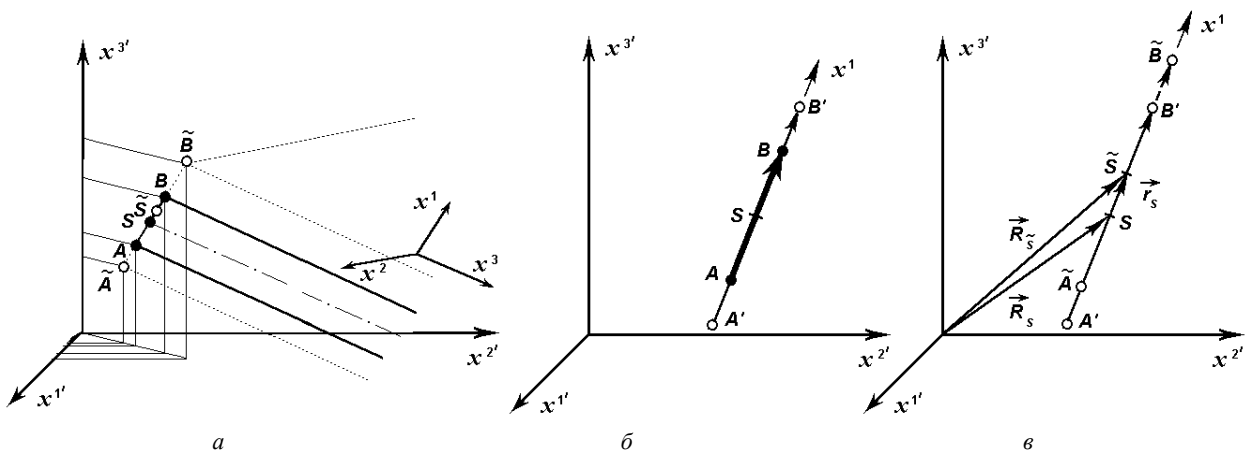


Рисунок 3 – Перетворення СЕО в СЕМ

де  $x_{s_2s_3}^{k'}$  і  $\tilde{x}_{s_2s_3}^{k'}$  – декартові координати середин ребер CEO і SEM (точки  $S$  та  $\tilde{S}$ , рис. 3) з сітковими координатами  $s_2$  та  $s_3$ ;  $t_{s_2s_3}^{k'}$  і  $\tilde{t}_{s_2s_3}^{k'}$  – проєкції на декартові осі  $x^{k'}$  ребер CEO і SEM, спрямованих вздовж осі  $x^1$  (відрізки  $AB$  та  $\tilde{A}\tilde{B}$ , вузлові проєкції товщин);  $b_{s_2s_3} = \tilde{t}_{s_2s_3} / t_{s_2s_3}$  – коефіцієнт зміни довжини ребра, тобто відношення відстаней між вузлами на обмежуючих поверхнях SEM та CEO вздовж  $x^1$  (відношення довжин відрізків  $\tilde{A}\tilde{B}$  и  $AB$ );  $a_{s_2s_3} = \pm |\vec{r}_{s_2s_3}| / t_{s_2s_3}$  – коефіцієнт зміщення ребра, знак якого відповідає вектору зсуву  $\vec{r}_{s_2s_3}$  ( $a_{s_2s_3} > 0$ , якщо напрямок  $\vec{r}_{s_2s_3}$  збігається з напрямком осі  $x^1$ ),  $r_{s_2s_3}$  – відстань між серединами ребер  $AB$  та  $\tilde{A}\tilde{B}$  (точками  $S$  та  $\tilde{S}$ ).

Зі співвідношення (9) випливає, що SEM збігається з CEO, коли коефіцієнтами перетворення  $\epsilon_{s_2s_3} = 1, a_{s_2s_3} = 0$ . Зауважимо, що величини  $x_{s_2s_3}^{k'}$  та  $t_{s_2s_3}^{k'}$  обчислюються через координати вузлів  $x_{s_1s_2s_3}^{k'}$  просторового CEO за формулами:

$$x_{s_2s_3}^{k'} = \frac{x_{s_1=+1s_2s_3}^{k'} + x_{s_1=-1s_2s_3}^{k'}}{2}, \quad (10)$$

$$t_{s_2s_3}^{k'} = x_{s_1=+1s_2s_3}^{k'} - x_{s_1=-1s_2s_3}^{k'}.$$

Наділення просторового CE додатковими змінними параметрами надало йому властивостей універсального. Такий підхід дає змогу моделювати за єдиною методологією і з використанням єдиного універсального просторового CE широкий клас неоднорідних оболонкових конструкцій. До додаткових змінних параметрів CE належать: ознака CE як CEO чи SEM; параметри перетворення CEO в SEM; кількість шарів у CE та їхні фізико-механічні характеристики [1].

### Моментна схема скінченних елементів у задачах термопружного деформування неоднорідних оболонок

Для побудови розв'язувальних скінченно-елементних співвідношень у формі методу переміщень використана моментна схема скінченних елементів (МССЕ) [1; 2; 13]. Узгоджені відповідно до МССЕ апроксимації переміщень і деформацій гарантують правильне врахування жорстких зміщень CE, що підвищує збіжність і точність розв'язків при рідких сітках. Відповідно до МССЕ функції повних деформацій (3) подаються у вигляді відрізка ряду Маклорена в центрі CE,  $x^k = 0$  [1]:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^0 + \epsilon_{ij}^{0f} \omega_{(ij)}^{(ff)} x^f + \epsilon_{ij}^{0fh} \delta_{(i)}^{(j)} \omega_{(ffh)}^{(hii)} x^f x^h, \quad (11)$$

$$\text{де } \epsilon_{ij}^0 = (\epsilon_{ij})_{(0)}, \quad \epsilon_{ij}^{0f} = \left( \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x^f} \right)_{(0)}, \quad \epsilon_{ij}^{0fh} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \epsilon_{ij}}{\partial x^f \partial x^h} \right)_{(0)}, \quad (12)$$

$$\omega_{ff\dots}^{hi\dots} = \omega_f^h \omega_f^i \dots, \quad \omega_f^h = \begin{cases} 0, & \text{при } f = h \\ 1, & \text{при } f \neq h \end{cases}$$

Оскільки розглядається температурний процес, що встановився, то температурне поле  $T$  за об'ємом оболонки вважається відомою і незалежною від НДС функцією координат. Розподіл температури в CE за товщиною пакета береться у вигляді ламаної, а в площині шарів – лінійним. Функція  $T_n$  визначається значеннями температури у вузлових точках шару [1]. З цих міркувань температурні деформації, які залежать як від температури, так і від властивостей матеріалу шару, прийняті в межах CE як лінійні функції координат  $x^2, x^3$  і, на відміну від функцій  $\epsilon_{ij}$  (11), як кусково-лінійні за координатою  $x^1$ . В межах  $n$ -го шару (рис. 1) функції температурних деформацій подаються як відрізок ряду Тейлора в центрі шару (точка  $O_n$  з координатами  $x_{O_n}^1 = d_n, x_{O_n}^2 = x_{O_n}^3 = 0$ ):

$$\epsilon_{ij}^T = \epsilon_{ij}^0 + \epsilon_{ij}^{0p} (x^p - x_{O_n}^p) \omega_{(ij)}^{(pp)} + \epsilon_{ij}^{0ph} (x^p - x_{O_n}^p) (x^h - x_{O_n}^h) \delta_{(i)}^{(j)} \omega_{(pph)}^{(hii)}, \quad (13)$$

де

$$\epsilon_{ij}^0 = (\epsilon_{ij}^T)_{(O_n)}, \quad \epsilon_{ij}^{0p} = \left( \frac{\partial \epsilon_{ij}^T}{\partial x^p} \right)_{(O_n)}, \quad \epsilon_{ij}^{0ph} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \epsilon_{ij}^T}{\partial x^p \partial x^h} \right)_{(O_n)}. \quad (14)$$

Функції напружень  $\bar{\sigma}^{ij} = C^{ijkl} \epsilon_{kl}$  та  $\sigma_T^{ij} = C^{ijkl} \alpha_{kl} T$  у межах CE приймаються лінійними за координатами  $x^2, x^3$  та кусково-лінійними за товщиною пакета (за координатою  $x^1$ ). Припускається, що компоненти тензорів  $C_n^{ijkl}, \alpha_n^{ij}$  є сталими в межах шарів. При отриманні нелінійних рівнянь методу скінченних елементів використовується форма подання функцій  $\bar{\sigma}_n^{ij}$  і  $\sigma_n^{ij}$  як лінійних відрізків рядів Тейлора в околі центра  $n$ -го шару CE:

$$\bar{\sigma}_n^{ij} = N_n^{ij} + M_n^{ij} (x^1 - x_{O_n}^1) + M_n^{ij} \alpha_n^\alpha x^\alpha + 2M_n^{ij} \alpha_n^\alpha (x^1 - x_{O_n}^1) x^\alpha + M_n^{ij} \alpha_n^\alpha \omega_{(\alpha)}^{(\beta)} x^\alpha x^\beta, \quad (15)$$

$$\sigma_n^{ij} = N_n^{ij} + M_n^{ij} (x^1 - x_{O_n}^1) + M_n^{ij} \alpha_n^\alpha x^\alpha + 2M_n^{ij} \alpha_n^\alpha (x^1 - x_{O_n}^1) x^\alpha + M_n^{ij} \alpha_n^\alpha \omega_{(\alpha)}^{(\beta)} x^\alpha x^\beta, \quad (16)$$

$$\text{де } N_n^{ij} = \left( \frac{\bar{\sigma}^{ij}}{n} \right) \Big|_{(O_n)} = C_n^{ijkl} \varepsilon_{kl}^{0f} + x_{O_n}^1 C_n^{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^{01},$$

$$M_n^{ij} = \left( \frac{\partial \bar{\sigma}^{ij}}{\partial x^1} \right) \Big|_{(O_n)} = B_n^{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^{01}, \quad (17)$$

$$M_n^{ij\alpha} = \left( \frac{\partial \bar{\sigma}^{ij}}{\partial x^\alpha} \right) \Big|_{(O_n)} = C_n^{ijkl} \varepsilon_{kl}^{0\alpha} \omega_{(kl)}^{(\alpha\alpha)} + 2x_{O_n}^1 C_n^{ij(\beta\beta)} \varepsilon_{(\beta\beta)}^{01\alpha} \omega_{(\alpha)}^{(\beta)},$$

$$M_n^{ij1\alpha} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \bar{\sigma}^{ij}}{\partial x^1 \partial x^\alpha} \right) \Big|_{(O_n)} = B_n^{ij(\beta\beta)} \varepsilon_{(\beta\beta)}^{01\alpha} \omega_{(\alpha)}^{(\beta)},$$

$$M_n^{ij\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \bar{\sigma}^{ij}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) \Big|_{(O_n)} = C_n^{ij11} \varepsilon_{11}^{0\alpha\beta};$$

$$N_n^T{}^{ij} = \left( \frac{T \sigma^{ij}}{n} \right) \Big|_{(O_n)} = C_n^{ijkl} \varepsilon_{kl}^T{}^0,$$

$$M_n^T{}^{ij} = \left( \frac{\partial T \sigma^{ij}}{\partial x^1} \right) \Big|_{(O_n)} = B_n^{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^T{}^1, \quad (18)$$

$$M_n^T{}^{ij\alpha} = \left( \frac{\partial T \sigma^{ij}}{\partial x^\alpha} \right) \Big|_{(O_n)} = C_n^{ijkl} \varepsilon_{kl}^T{}^{0\alpha} \omega_{(kl)}^{(\alpha\alpha)},$$

$$M_n^T{}^{ij1\alpha} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 T \sigma^{ij}}{\partial x^1 \partial x^\alpha} \right) \Big|_{(O_n)} = B_n^{ij(\beta\beta)} \varepsilon_{(\beta\beta)}^T{}^{01\alpha} \omega_{(\alpha)}^{(\beta)},$$

$$M_n^T{}^{ij\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 T \sigma^{ij}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) \Big|_{(O_n)} = C_n^{ij11} \varepsilon_{11}^T{}^{0\alpha\beta};$$

$$B_n^{ijkl} = C_n^{ijkl} - \frac{C_n^{ij11} C_n^{11kl}}{C_n^{1111}}. \quad (19)$$

Застосування статичної гіпотези (6) привело до коригування компонентів тензорів пружних сталей  $C_n^{ijkl}$  у шарах за формулою (19).

### Співвідношення МСЕ у задачах геометрично нелінійного деформування пружних неоднорідних оболонок

Дослідження процесів нелінійного деформування оболонок базується на загальній лагранжевій постановці варіаційної задачі у приростах. Процес деформування розглядається як послідовність рівноважних станів оболонки при достатньо малих кроках навантаження. На поточному кроці навантаження передісторія НДС оболонки та її геометрія вважаються відомими. Рівноважний стан оболонки визначається на основі принципу можливих переміщень за варіаційним рівнянням Лагранжа [13], при скінченно-елементній апроксимації:

$$\delta \Pi = \sum_{FE} (\delta W_{FE} - \delta A_{FE}) = 0, \quad (20)$$

де  $\Pi$  – потенціальна енергія деформування СЕМО;  $\sum_{FE}$  – сума за скінченними елементами;  $\delta W_{FE}$  та  $\delta A_{FE}$  – віртуальні роботи внутрішніх і зовнішніх сил СЕ.

Враховуючи дію на оболонку термосилового навантаження і залежність (4), віртуальну роботу внутрішніх сил СЕ, подаємо так:

$$\begin{aligned} \delta W_{FE} &= \int_{V_{FE}} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^e dV = \int_{V_{FE}} C^{ijkl} (\varepsilon_{kl}^T - \varepsilon_{kl}) \delta (\varepsilon_{ij}^T - \varepsilon_{ij}) dV = \\ &= \int_{V_{FE}} \bar{\sigma}^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^T dV - \int_{V_{FE}} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \delta \bar{W}_{FE} - \delta W_{FE}. \end{aligned} \quad (21)$$

Перший інтеграл в (21) визначає віртуальну роботу внутрішніх сил від повних деформацій, які залежать від шуканих вузлових переміщень. На його основі отримується матриця реакцій багат шарового СЕ. З віртуальної роботи внутрішніх сил від температурних деформацій (другий інтеграл) отримується матриця еквівалентних температурних навантажень СЕ. У розв'язуваних рівняннях ця матриця додається до матриці силових вузлових навантажень СЕ. Інтегрування (21) виконується за звичайною для МСЕ процедурою і здійснюється в межах СЕ (рис. 1) за криволінійними місцевими координатами від  $x^i = -\frac{1}{2}$  до  $x^i = +\frac{1}{2}$ , величина  $\sqrt{g}$  вважається сталою.

$$\begin{aligned} \delta \bar{W}_{FE} &= \sqrt{g} \sum_{n=1}^m \int_{x^1=a_n}^{a_{n+1}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \int_{x^3=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left( N_n^{ij} + M_n^{ij} (x^1 - x_{O_n}^1) + \right. \\ &+ M_n^{ij\alpha} x^\alpha + 2M_n^{ij1\alpha} (x^1 - x_{O_n}^1) x^\alpha + M_n^{ij\alpha\beta} \omega_{(\alpha)}^{(\beta)} x^\alpha x^\beta \left. \right) \times \\ &\times \delta \left( \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}^{0g} x^g \omega_{(ij)}^{(gg)} + \varepsilon_{ij}^{0gh} x^g x^h \delta_{(i)}^{(j)} \omega_{(ggh)}^{(hii)} \right) dx^1 dx^2 dx^3 = \\ &= \sqrt{g} \left( Q_{ij}^0 \delta \varepsilon_{ij}^0 + Q_{\alpha}^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^{0\alpha} \omega_{(ij)}^{(qq)} + Q_{23}^{11} \delta \varepsilon_{11}^{023} + \right. \\ &+ Q_{1\alpha}^{(\beta\beta)} \delta \varepsilon_{(\beta\beta)}^{01\alpha} \omega_{(\alpha)}^{(\beta)} \left. \right), \end{aligned} \quad (22)$$

де  $Q^{ij} = N^{ij}$ ,  $Q_1^{\alpha\beta} = M_1^{\alpha\beta} + M_1^{**\alpha\beta}$ ,  $Q_\alpha^{ij} = \frac{1}{12} M_\alpha^{ij}$ ,

$$Q_{1\alpha}^{(\beta\beta)} = \frac{1}{6} \left( M_{1\alpha}^{(\beta\beta)} + 2 M_{1\alpha}^{**(\beta\beta)} \right), \quad Q_{23}^{11} = \frac{1}{36} M_{23}^{11};$$

$$N^{ij} = \sum_{n=1}^m N_n^{ij} t_n = C^{ijkl} \bar{\xi}_{kl},$$

$$N^{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^m N_n^{\alpha\beta} t_n d_n = \bar{C}^{\alpha\beta\nu\mu} \bar{\varphi}_{\nu\mu}^{-1},$$

$$M_\alpha^{ij} = \sum_{n=1}^m M_n^{ij} t_n = C^{ijkl} \bar{\varphi}_{kl}^{-\alpha} \omega_{(kl)}^{(\alpha\alpha)},$$

$$M_{23}^{11} = \sum_{n=1}^m M_{23}^{11} t_n = C^{1111} \bar{\Psi}_{11}^{23},$$

$$M_1^{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^m M_n^{\alpha\beta} \frac{t_n^3}{12} = B^{\alpha\beta\nu\mu} \bar{\varphi}_{\nu\mu}^{-1},$$

$$M_{1\alpha}^{(\beta\beta)} = \sum_{n=1}^m M_n^{(\beta\beta)} \frac{t_n^3}{12} = B^{(\beta\beta\beta\beta)} \bar{\Psi}_{(\beta\beta)}^{-1\alpha},$$

$$M_\alpha^{(\beta\beta)} = \sum_{n=1}^m M_n^{(\beta\beta)} t_n d_n = 2 \bar{C}^{(\beta\beta\beta\beta)} \bar{\Psi}_{(\beta\beta)}^{-\alpha};$$

$$C^{ijkl} = \sum_{n=1}^m C_n^{ijkl} t_n, \quad B^{\alpha\beta\nu\mu} = \sum_{n=1}^m B_n^{\alpha\beta\nu\mu} \frac{t_n^3}{12},$$

$$\bar{C}^{\alpha\beta\nu\mu} = \sum_{n=1}^m C_n^{\alpha\beta\nu\mu} t_n d_n^2;$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^0 = (\nabla_i u_j)|_{(0)}, \quad \bar{\varepsilon}_{ij}^{0q} = \left( \frac{\partial \nabla_i u_j}{\partial x^q} \right)|_{(0)}, \quad \bar{\varepsilon}_{ij}^{0qr} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \nabla_i u_j}{\partial x^q \partial x^r} \right)|_{(0)};$$

$$\nabla_i u_j = C_j^{k'} \frac{\partial u^{k'}}{\partial x^i}.$$

Зазвичай для просторого СЕ як шукані невідомі використовуються декартові переміщення вузлів на його обмежувальних поверхнях  $u_{s_1 s_2 s_3}^{k'}$ . Проте для тонких оболонок доцільніше за розв'язувальні функції брати переміщення  $v_{s_2 s_3}^{k'}$  у вузлах серединної поверхні СЕ та різниці переміщень  $v_{s_2 s_3}^{k'}$  у вузлах на обмежувальних поверхнях (узагальнені вузлові повороти ребер СЕ):

$$v_{s_2 s_3}^{k'} = \frac{u_{s_1 = +1 s_2 s_3}^{k'} + u_{s_1 = -1 s_2 s_3}^{k'}}{2}, \quad (23)$$

$$v_{s_2 s_3}^{k'} = u_{s_1 = +1 s_2 s_3}^{k'} - u_{s_1 = -1 s_2 s_3}^{k'}.$$

Введену заміну:

$$u_{s_1 s_2 s_3}^{k'} = v_{s_2 s_3}^{k'} + \frac{S_1}{2} v_{s_2 s_3}^{k'} \quad (24)$$

можна тлумачити, як перехід від 8-ми вузлового просторого СЕ (з трьома переміщеннями у вузлах  $u_{s_1 s_2 s_3}^{k'}$ ) до 4-х вузлового оболонкового СЕ з шістьма

узагальненими переміщеннями вузлів  $v_{s_2 s_3}^{k'}, v_{s_2 s_3}^{k'}$ , які долучені до серединної поверхні елемента.

Після виконання низки перетворень отримуються в аналітичному вигляді коефіцієнти матриці вузлових реакцій багат шарового СЕ  $R_{s_2 s_3}^{k'}$ , які долучені до змінних  $v_{s_2 s_3}^{k'}, v_{s_2 s_3}^{k'}$ :

$$\delta \bar{W}_{FE} = \sum_{s_2 = \pm 1} \sum_{s_3 = \pm 1} (R_{v_{s_2 s_3}}^{k'} \delta v_{s_2 s_3}^{k'} + R_{v_{s_2 s_3}}^{k'} \delta v_{s_2 s_3}^{k'}), \quad (25)$$

де

$$R_{v_{s_2 s_3}}^{k'} = \frac{1}{2} \sqrt{g} \left[ s_\alpha \left( C_{j_0}^{k'} Q^{\alpha j} + C_{\beta 1_0}^{k'} Q_1^{\alpha\beta} \right) + 2 s_\alpha s_\beta C_j^{k'} s_\alpha Q_\alpha^{\beta j} \omega_{(j\beta)}^{(\alpha\alpha)} + 2 s_2 s_3 \left( C_{21 s_3}^{k'} Q_{13}^{22} + C_{31 s_2}^{k'} Q_{12}^{33} \right) \right],$$

$$R_{v_{s_2 s_3}}^{k'} = \frac{1}{2} \sqrt{g} \left[ \frac{1}{2} C_{j_0}^{k'} Q^{1j} + s_\alpha \left( C_{\beta_0}^{k'} Q_1^{\alpha\beta} + C_j^{k'} s_\alpha Q_\alpha^{1j} \omega_{(j)}^{(\alpha)} \right) + 2 s_2 s_3 \left( C_{1 s_2 s_3}^{k'} Q_{23}^{11} + C_{2 s_3}^{k'} Q_{13}^{22} + C_{12}^{33} C_{s_2}^{k'} Q_{12}^{33} \right) \right], \quad (26)$$

де  $C_{j_0}^{k'}, C_j^{k'}, C_j^{k'}$  – значення компонент тензора перетворень відповідно в центрі СЕ (точці  $O$ ), у центрі грані СЕ (із сітковою координатою  $s_q$ ), у центрі ребра СЕ (лінії перетину його граней із сітковими координатами  $s_q, s_r$ );  $C_{\beta 1_0}^{k'}, C_{\beta 1_\alpha}^{k'}$  – значення похідної  $\partial C_{\beta}^{k'} / \partial x^1$  у центрі СЕ та в центрі грані  $s_\alpha$ , відповідно.

Процедура інтегрування віртуальної роботи внутрішніх сил від температурних деформацій  $\delta W_{FE}$  через спільність застосовуваних підходів і співвідношень є методично аналогічною до процедури інтегрування віртуальної роботи  $\delta \bar{W}_{FE}$ .

Застосований підхід надав можливість виконати інтегрування в (21) аналітично й отримати в явному вигляді матриці реакцій, жорсткості, геометричної жорсткості та еквівалентних температурних навантажень [1; 2]. Отримані для просторого СЕ співвідношення є універсальними, оскільки вони отримані в місцевій системі координат для загального (єдиного) СЕ (рис. 2, б) і є інваріантними відносно вузлових координат і переміщень, кількості шарів і технічних сталей матеріалів шарів. Характеристики СЕ та пов'язані з ними додаткові параметри певним чином входять у ці співвідношення. Отже, отримані співвідношення для відповідних матриць СЕО та СЕМ є однаковими за формою подання. Але при цьому необхідно враховувати, що при отримуванні матриць для СЕО

та СЕМ за поверхні відліку взято їхні серединні поверхні, які, як правило, між собою не збігаються. Тому відповідні узагальнені вузлові переміщення  $v_{s_2 s_3}^{k'}$ ,  $v_{s_2 s_3}^{k'}$  для СЕО та СЕМ розуміються як різні змінні, що долучені до серединної поверхні свого СЕ. При формуванні системи розв'язуваних рівнянь СЕМО виникає проблема узгодження цих різних змінних при об'єднанні комбінацій СЕО та СЕМ у єдиний ансамбль. За єдину поверхню відліку для СЕМО береться серединна поверхня обшивки оболонки, яка збігається із серединною поверхні кожного СЕО. Тому, при побудові системи розв'язувальних рівнянь для СЕМ завжди виконується корегування відповідних коефіцієнтів матриць. Оскільки просторовий СЕ є ізопараметричним і функції форми для координат і переміщень є однаковими, тому перехід від узагальнених вузлових переміщень СЕМ (їх надалі будемо позначати значком "тильда"  $\tilde{v}_{s_2 s_3}^{k'}$ ,  $\tilde{v}_{s_2 s_3}^{k'}$ ) до узагальнених вузлових переміщень СЕО  $v_{s_2 s_3}^{k'}$ ,  $v_{s_2 s_3}^{k'}$  виконується за формулами:

$$\tilde{v}_{s_2 s_3}^{k'} = v_{s_2 s_3}^{k'} + a_{s_2 s_3} v_{s_2 s_3}^{k'}, \quad \tilde{v}_{s_2 s_3}^{k'} = b_{s_2 s_3} v_{s_2 s_3}^{k'}; \quad (27)$$

$$\tilde{u}_{s_1 s_2 s_3}^{k'} = \tilde{v}_{s_2 s_3}^{k'} + \frac{s_1}{2} \tilde{v}_{s_2 s_3}^{k'}. \quad (28)$$

Ці залежності забезпечують умову сумісності переміщень між скінченими елементами СЕМО на усіх ділянках оболонки ступінчасто-змінної товщини.

Так, для СЕМ, згідно з (25), віртуальна робота внутрішніх сил від повних деформацій на узагальнених вузлових переміщеннях, що долучені до його серединної поверхні, подається так:

$$\delta \tilde{W}_{FE} = \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} (\tilde{R}_{s_2 s_3}^{k'} \delta \tilde{v}_{s_2 s_3}^{k'} + \tilde{R}_{\tilde{v} s_2 s_3}^{k'} \delta \tilde{v}_{s_2 s_3}^{k'}). \quad (29)$$

Коефіцієнти матриці вузлових реакцій СЕМ  $\tilde{R}_{s_2 s_3}^{k'}$ ,  $\tilde{R}_{\tilde{v} s_2 s_3}^{k'}$  обчислюються за загальними формулами (26), в яких використовуються дані СЕМ. Підставляючи (27) у (29), визначаємо  $\delta \tilde{W}_{FE}$  для СЕМ через узагальнені вузлові переміщення на серединній поверхні СЕО  $v_{s_2 s_3}^{k'}$ ,  $v_{s_2 s_3}^{k'}$ :

$$\delta \tilde{W}_{FE} = \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} (\tilde{R}_{s_2 s_3}^{k'} \delta v_{s_2 s_3}^{k'} + \tilde{R}_{\tilde{v} s_2 s_3}^{k'} \delta v_{s_2 s_3}^{k'}), \quad (30)$$

$$\text{де } \tilde{R}_{s_2 s_3}^{k'} = \tilde{R}_{\tilde{v} s_2 s_3}^{k'}, \quad \tilde{R}_{\tilde{v} s_2 s_3}^{k'} = \tilde{R}_{\tilde{v} s_2 s_3}^{k'} a_{s_2 s_3} + \tilde{R}_{s_2 s_3}^{k'} b_{s_2 s_3}. \quad (31)$$

За аналогічною процедурою корегуються коефіцієнти усіх матриць для СЕМ. Такий підхід надав можливість застосовувати співвідношення МСЕ для всіх розглядуваних конструктивних елементів неоднорідної оболонки при формуванні розв'язувальної системи геометрично нелінійних рівнянь.

### Матриця мас універсального просторового СЕ багат шарової оболонки

Частоти власних коливань оболонки обчислюються на основі лінеаризованих скінченно-елементних рівнянь руху. При цьому модальний аналіз виконується на кожному кроці навантаження з урахуванням напруженого та деформованого станів системи, що викликані статичним навантаженням. Досліджуються малі коливання відносно заданого (отриманого на кроці) положення статичної рівноваги.

У методі скінчених елементів найсприйнятливішою для розв'язання задач динаміки є узгоджена матриця розподілених мас, методика визначення якої аналогічна процедурі побудови матриці жорсткості. Вона отримується зведенням розподілених інерційних сил до еквівалентних вузлових зусиль.

Розглядається універсальний просторовий ізопараметричний СЕ (рис. 1, 2). Відповідно до прийнятої апроксимації функцій координат і переміщень СЕ за полілінійним законом (7), (8) функції прискорень подаються так:

$$\ddot{u}^{k'}(x^i) = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \prod_{k=1}^3 \left( s_{(i)} x^{(i)} + \frac{1}{2} \right) \ddot{u}_{s_1 s_2 s_3}^{k'}, \quad (32)$$

де  $\ddot{u}^{k'} = \partial^2 u^{k'} / \partial t^2$ ;  $t$  – параметр часу;  $\ddot{u}_{s_1 s_2 s_3}^{k'}$  – значення вузлових прискорень.

Отже, стан СЕ визначається значеннями його вузлових координат  $x_{s_1 s_2 s_3}^{k'}$ , переміщень  $u_{s_1 s_2 s_3}^{k'}$  та прискорень  $\ddot{u}_{s_1 s_2 s_3}^{k'}$ , маючи на увазі, що функції  $x^{k'}$ ,  $u^{k'}$ ,  $\ddot{u}^{k'}$  залежать від часу. Розглядається просторовий СЕ об'ємом  $V_{FE}$  з масовою густиною  $\rho = \rho(x^k)$ . Через багат шаровість оболонки густина  $\rho = \rho(x^k)$  береться сталою в площині  $x^2 x^3$  та ступінчасто-сталою функцією за товщиною СЕ (за координатою  $x^1$ ) (рис. 1):  $\rho = \rho(x^1) = \rho_n$ ,  $a_n \leq x^1 \leq a_{n+1}$ .

Скористаємося формулою, що визначає роботу сил інерції на можливих переміщеннях. Віртуальну роботу сил інерції СЕ визначаємо так [2; 13]:

$$\delta K_{FE} = - \int_{V_{FE}} \rho \ddot{u}^i \delta u^i dV_{FE}. \quad (33)$$

Процедура інтегрування (33) здійснюється звичайним для МСЕ способом. Як і вище, величина  $\sqrt{g}$  береться сталою в межах СЕ. Інтегрування виконується за місцевими координатами в межах СЕ (від  $x^i = -\frac{1}{2}$  до  $x^i = +\frac{1}{2}$ ) з урахуванням його багат шарової структури (рис. 1) і прийнятих припущень:



$$\begin{aligned} \delta K_{FE} &= -\sqrt{g} \sum_{n=1}^m \int_{x^1=a_n}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^2=\frac{1}{2}}^{x^3=-\frac{1}{2}} \rho_n \ddot{u}^{i'} \delta u^{i'} dx^1 dx^2 dx^3 = \\ &= -\frac{\sqrt{g}}{144} \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \sum_{p_1=\pm 1} \sum_{p_2=\pm 1} \sum_{p_3=\pm 1} \\ &\ddot{u}_{s_1 s_2 s_3}^{i'} \delta u_{p_1 p_2 p_3}^{i'} (s_2 p_2 + 3)(s_3 p_3 + 3) \times \\ &\times \left\{ \sum_{n=1}^m \rho_n (a_{n+1} - a_n) + (s_1 + p_1) \sum_{n=1}^m \rho_n (a_{n+1}^2 - a_n^2) + \right. \\ &\left. + 4 s_1 p_1 \sum_{n=1}^m \rho_n \frac{a_{n+1}^3 - a_n^3}{3} \right\}, \end{aligned} \quad (34)$$

Перейдемо в (34) від вузлових змінних  $u^{k'}, \ddot{u}^{k'}$  на обмежувальних поверхнях СЕ до розв'язуваних функцій  $v_{s_2 s_3}^{k'}, v_{s_2 s_3}^{k'}; \ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'}, \ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'}$  на його серединній поверхні, врахувавши подання:

$$\ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'} = \frac{\ddot{u}_{s_1=+1 s_2 s_3}^{k'} + \ddot{u}_{s_1=-1 s_2 s_3}^{k'}}{2}, \quad (35)$$

$$\ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'} = \ddot{u}_{s_1=+1 s_2 s_3}^{k'} - \ddot{u}_{s_1=-1 s_2 s_3}^{k'};$$

$$\ddot{u}_{s_1 s_2 s_3}^{k'} = \ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'} + \frac{s_1}{2} \ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'}. \quad (36)$$

Виконавши підсумовування за сітковими координатами  $s_1$  та  $p_1$ , отримуємо:

$$\begin{aligned} \delta K_{FE} &= -\frac{\sqrt{g}}{144} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \sum_{p_2=\pm 1} \sum_{p_3=\pm 1} (s_2 p_2 + 3) \times \\ &\times (s_3 p_3 + 3) \times \left\{ \sum_{n=1}^m \rho_n t_n \ddot{v}_{s_2 s_3}^{i'} \delta v_{p_2 p_3}^{i'} + \right. \\ &\left. + \sum_{n=1}^m \rho_n t_n x_{O_n}^1 \left( \ddot{v}_{s_2 s_3}^{i'} \delta v_{p_2 p_3}^{i'} + \ddot{v}_{s_2 s_3}^{i'} \delta v_{p_2 p_3}^{i'} \right) + \right. \\ &\left. + \sum_{n=1}^m \rho_n \frac{a_{n+1}^3 - a_n^3}{3} \ddot{v}_{s_2 s_3}^{i'} \delta v_{p_2 p_3}^{i'} \right\} = \\ &= - \sum_{\substack{s_2, s_3=\pm 1 \\ p_2, p_3=\pm 1}} \left( m_{s_2 s_3 p_2 p_3} \ddot{v}_{s_2 s_3}^{i'} \delta v_{p_2 p_3}^{i'} + \right. \\ &\left. + m_{\ddot{v}}^{s_2 s_3 p_2 p_3} \ddot{v}_{s_2 s_3}^{i'} \delta v_{p_2 p_3}^{i'} + m_{\ddot{v}}^{s_2 s_3 p_2 p_3} \ddot{v}_{s_2 s_3}^{i'} \delta v_{p_2 p_3}^{i'} + \right. \\ &\left. + m_{\ddot{v}}^{s_2 s_3 p_2 p_3} \ddot{v}_{s_2 s_3}^{i'} \delta v_{p_2 p_3}^{i'} \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Аналітичні розрахункові формули для коефіцієнтів чотирьох блоків узгодженої матриці мас

$$m_{\ddot{v}}^{s_2 s_3 p_2 p_3}, \quad m_{\ddot{v}}^{s_2 s_3 p_2 p_3}, \quad m_{\ddot{v}}^{s_2 s_3 p_2 p_3},$$

мають вигляд:

$$\begin{aligned} m_{\ddot{v}}^{s_2 s_3 p_2 p_3} &= \frac{\sqrt{g}}{144} (s_2 p_2 + 3)(s_3 p_3 + 3) \sum_{n=1}^m \rho_n t_n = \\ &= (s_2 p_2 + 3)(s_3 p_3 + 3) \hat{\rho}, \\ m_{\ddot{v}}^{s_2 s_3 p_2 p_3} &= \frac{\sqrt{g}}{144} (s_2 p_2 + 3)(s_3 p_3 + 3) \sum_{n=1}^m \rho_n t_n x_{O_n}^1 = \\ &= (s_2 p_2 + 3)(s_3 p_3 + 3) \hat{\bar{\rho}}, \\ m_{\ddot{v}}^{s_2 s_3 p_2 p_3} &= \frac{\sqrt{g}}{144} (s_2 p_2 + 3)(s_3 p_3 + 3) \sum_{n=1}^m \rho_n t_n x_{O_n}^1 = \\ &= (s_2 p_2 + 3)(s_3 p_3 + 3) \hat{\bar{\rho}}, \\ m_{\ddot{v}}^{s_2 s_3 p_2 p_3} &= \frac{\sqrt{g}}{144} (s_2 p_2 + 3)(s_3 p_3 + 3) \sum_{n=1}^m \rho_n \frac{a_{n+1}^3 - a_n^3}{3} = \\ &= (s_2 p_2 + 3)(s_3 p_3 + 3) \hat{\bar{\rho}}, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\text{де } \hat{\rho} = \frac{\sqrt{g}}{36} \sum_{n=1}^m \rho_n t_n, \quad \hat{\bar{\rho}} = \frac{\sqrt{g}}{36} \sum_{n=1}^m \rho_n t_n x_{O_n}^1,$$

$$\hat{\bar{\rho}} = \frac{\sqrt{g}}{36} \sum_{n=1}^m \rho_n \frac{a_{n+1}^3 - a_n^3}{3}.$$

На основі прийнятих положень зв'язок узагальнених вузлових прискорень серединних поверхонь СЕО та СЕМ є таким самим, як і для їхніх узагальнених вузлових координат і переміщень. Тому

$$\ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'} = \ddot{u}_{s_2 s_3}^{k'} + a_{s_2 s_3} \ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'}, \quad \ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'} = b_{s_2 s_3} \ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'}. \quad (39)$$

Остаточно визначаємо  $\delta \tilde{K}_{FE}$  для СЕМ через єдині невідомі – узагальнені вузлові переміщення  $v_{s_2 s_3}^{k'}, v_{s_2 s_3}^{k'}$  та прискорення  $\ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'}, \ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'}$ , що долучені до серединної поверхні СЕО:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{K}_{FE} &= - \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \sum_{p_2=\pm 1} \sum_{p_3=\pm 1} \left( \tilde{m}_{\ddot{v}}^{s_2 s_3 p_2 p_3} \ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'} \delta v_{p_2 p_3}^{k'} + \right. \\ &\left. + \tilde{m}_{\ddot{v}}^{s_2 s_3 p_2 p_3} \ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'} \delta v_{p_2 p_3}^{k'} + \tilde{m}_{\ddot{v}}^{s_2 s_3 p_2 p_3} \ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'} \delta v_{p_2 p_3}^{k'} + \right. \\ &\left. + \tilde{m}_{\ddot{v}}^{s_2 s_3 p_2 p_3} \ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'} \delta v_{p_2 p_3}^{k'} \right), \end{aligned} \quad (40)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{\ddot{v}}^{s_2 s_3 p_2 p_3} &= \tilde{m}_{\ddot{v}}^{s_2 s_3 p_2 p_3}, \\ \tilde{m}_{\ddot{v}}^{s_2 s_3 p_2 p_3} &= a_{p_2 p_3} \tilde{m}_{\ddot{v}}^{s_2 s_3 p_2 p_3} + b_{s_2 s_3} \tilde{m}_{\ddot{v}}^{s_2 s_3 p_2 p_3}, \\ \tilde{m}_{\ddot{v}}^{s_2 s_3 p_2 p_3} &= a_{s_2 s_3} \tilde{m}_{\ddot{v}}^{s_2 s_3 p_2 p_3} + b_{p_2 p_3} \tilde{m}_{\ddot{v}}^{s_2 s_3 p_2 p_3}, \\ \tilde{m}_{\ddot{v}}^{s_2 s_3 p_2 p_3} &= a_{s_2 s_3} a_{p_2 p_3} \tilde{m}_{\ddot{v}}^{s_2 s_3 p_2 p_3} + a_{s_2 s_3} b_{p_2 p_3} \tilde{m}_{\ddot{v}}^{s_2 s_3 p_2 p_3} + \\ &+ a_{p_2 p_3} b_{s_2 s_3} \tilde{m}_{\ddot{v}}^{s_2 s_3 p_2 p_3} + b_{s_2 s_3} b_{p_2 p_3} \tilde{m}_{\ddot{v}}^{s_2 s_3 p_2 p_3}. \end{aligned} \quad (41)$$

Отримані блоки коефіцієнтів узгодженої матриці мас модифікованого просторового скінченного елемента (41), що долучені до прийнятих єдиних невідомих  $v_{s_2 s_3}^{k'}, v_{s_2 s_3}^{k'}, \ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'}, \ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'}$ , при  $b_{s_2 s_3} = 1, a_{s_2 s_3} = 0, \epsilon$  відповідними коефіцієнтами СЕ обшивки (38).

## Висновки

Наведено методологію отримання в аналітичному вигляді співвідношень методу скінченних елементів, придатних для чисельного формування геометрично нелінійних рівнянь деформування та коливань багат шарових оболонок ступінчасто-змінної товщини, що перебуває під дією термосилових навантажень.

Побудова розв'язуваних співвідношень ґрунтується на застосуванні універсального ізопараметричного просторового скінченного елемента з полілінійними функціями форми. Елемент наділений властивістю змінювати свої розміри за товщиною оболонки і здатністю ексцентрично зміщуватися відносно серединної поверхні обшивки. Це дає змогу моделювати різні ділянки оболонки

ступінчато-змінної товщини за допомогою єдиного універсального СЕ. Також скінченний елемент призначений для моделювання багат шарових оболонок. Розв'язувані співвідношення побудовані відповідно до моментної схеми скінченних елементів. За поверхню відліку взято серединну поверхню обшивки оболонки.

У явному вигляді шляхом аналітичного інтегрування отримано усі матриці для універсального просторового багат шарового СЕ, у т. ч. узгоджена матриця розподілених мас. Такий підхід дає змогу зменшити трудомісткість чисельних обчислень при побудові розв'язуваних рівнянь рівноваги скінченно-елементної моделі оболонки, а також прискорити виконання обчислень при алгоритмічній реалізації методу.

## Список літератури

1. Баженов В. А., Кривенко О. П., Соловей М. О. Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури: приєднання до руху відкритого доступу. Київ : ЗАТ «Віпол». 2010. 316 с.
2. Баженов В. А., Кривенко О. П. Стійкість і коливання пружних неоднорідних оболонок при термосилових навантаженнях. Київ : Вид-во "Каравела", 2020. 187 с.
3. Амиро И. Я., Заруцкий В. А. Методы расчета оболочек. Т. 2. Теория ребристых оболочек. Киев : Наукова думка. 1980. 368 с.
4. Гавриленко Г. Д., Трубицина О. А. Колебания и устойчивость ребристых оболочек вращения. Днепропетровск : ТОВ «Барвікс». 2008. 155 с.
5. Zarutskii V. A., Lugovoi P. Z., Meish V. F. Dynamic problems for and stress-strain state of inhomogeneous shell structures under stationary and nonstationary loads. *International Applied Mechanics*. 2009. Vol 45, № 3. Pp. 245–271.
6. Маневич А. И. Устойчивость и оптимальное проектирование подкрепленных оболочек. Киев ; Донецк : Вища школа. 1979. 152 с.
7. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. Москва : Наука. 1974. 446 с.
8. Гавриленко Г. Д. Методики численного расчета устойчивости подкрепленных оболочек. Киев : Наукова думка. 1991. 176 с.
9. Блох В. И. Теория упругости. Харьков : Изд-во ХГУ. 1964. 483 с.
10. Новацкий В. Теория упругости. Москва : Мир. 1975. 872 с.
11. Работнов Ю. Н. Механика твердого деформируемого тела. Москва : Наука. 1988. 712 с.
12. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Москва : Наука. 1979. 512 с.
13. Метод конечных элементов в механике твердых тел / А. С. Сахаров, В. Н. Кислокий, В. В. Киричевский и др. Київ: Вища шк. Головн. изд-во. 1982. 480 с.

Стаття надійшла до редколегії 10.03.2023

### Krivenko Olga

PhD (Eng.), Senior Researcher, Leading Researcher of the Research Institute of Structural Mechanics,  
<https://orcid.org/0000-0002-1623-9679>

*Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv*

### Lizunov Petro

DSc (Eng.), Professor, Head of the Department of Structural Mechanics, <https://orcid.org/0000-0003-2924-3025>

*Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv*

### Vorona Yurii

PhD (Eng.), Associate Professor, Professor of the Department of Structural Mechanics,  
<https://orcid.org/0000-0001-8130-7204>

*Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv*

### Kalashnikov Oleksandr

Junior Researcher of the Research Institute of Construction Mechanics, <https://orcid.org/0009-0009-7825-9809>

*Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv*

**APPLICATION OF THE FINITE ELEMENT MOMENT SCHEME TO THE INVESTIGATION OF THIN ELASTIC SHELLS OF INHOMOGENEOUS STRUCTURE**

**Abstract.** The work is devoted to the problem of developing a universal method for studying the deformation, buckling, postbuckling behavior and vibrations of thin and medium-thickness shells of complex shape and structure under the action of mechanical and thermal loads. A wide class of shells is considered: of constant and smooth-variable thickness, with ribs and cover plates, channels and cavities, holes, sharp bends of the mid-surface, and with a multilayer structure of the material. The method is based on the positions of the 3D geometrically nonlinear theory of thermoelasticity without the use of simplifying hypotheses of the theory of shells. The development of the computational model is based on the use of a universal isoparametric spatial finite element with multilinear shape functions, which is the same for all sections of the shell with stepwise variable thickness. The governing equations are constructed in accordance with the requirements of the finite element moment scheme. The mid-surface of the shell's casing is taken as a single reference surface. All matrices of governing equations for a universal spatial multilayer finite element are obtained in explicit form by analytical integration. This speeds up the execution of calculations in the algorithmic implementation of the method. Such an approach, based on a unified methodology, makes it possible to study the behavior of multilayer shells with different geometric features in terms of thickness under complex thermo-mechanical loading.

**Keywords:** shell; step-variable thickness; universal 3D finite element; finite element moment scheme; geometrically nonlinear deformation; buckling; postbuckling behavior; vibration; thermo-mechanical load

**References**

1. Bazhenov, V. A., Krivenko, O. P., Solovei, N. A. (2010). Nonlinear Deformation and Stability of Elastic Inhomogeneous Structure Shells. Kyiv: Vipol, 316. (in Ukrainian).
2. Bazhenov, V. A., Krivenko, O. P. (2020). Buckling and Vibrations of Elastic Inhomogeneous Shells under thermo-mechanical loads. Kyiv: Karavella, 187. (in Ukrainian).
3. Amiro, I. Ya., Zarutsky, V. A. (1980). Methods for calculating shells. T. 2. Theory of ribbed shells. Kyiv: Naukova shkola, 368. (in Russian).
4. Gavrilenko, G. D., Trubitsina, O. A. (2008). Vibrations and stability of ribbed shells of revolution. Dnepropetrovsk: TOV "Barviks", 155. (in Russian).
5. Zarutskii, V. A., Lugovoi, P. Z., Meish, V. F. (2009). Dynamic problems for and stress-strain state of inhomogeneous shell structures under stationary and nonstationary loads. *International Applied Mechanics*. 45, 3, 245-271.
6. Manevich, A. I. (1979). Stability and optimal design of reinforced shells. (1979). Kyiv; Donetsk: Vishcha shkola, 152. (in Russian).
7. Ambartsumyan, S. A. (1974). General Theory of Anisotropic Shells. M.: Nauka, 446. (in Russian).
8. Gavrilenko, G. D. (1991). Methods for Numerical Calculation of the Stability of Reinforced Shells. Kyiv: Naukova dumka, 176. (in Russian).
9. Bloch, V. I. (1964). Theory of Elasticity. Kharkov: Publishing House of KhSU, 483. (in Russian).
10. Novatsky, V. (1975). Theory of elasticity. Moscow: Mir, 872. (in Russian).
11. Rabotnov, Yu. N. (1988). Mechanics of a Solid Deformable Body. Moscow: Nauka, 712. (in Russian).
12. Goldenveizer, A. L. (1979). Theory of elastic thin shells. Moscow: Nauka, 512. (in Russian).
13. Sakharov, A. S., et al. (1982). Finite element method in solid mechanics. Kyiv: Vishcha shkola. Golovn. izd-vo, 480. (in Russian).

**Посилання на публікацію**

- APA Krivenko, Olga P., Lizunov, Petro, Vorona, Yuri & Kalashnikov, Oleksandr. (2023). Application of the finite element moment scheme to the investigation of thin elastic shells of inhomogeneous structure. *Management of Development of Complex Systems*, 53, 52–62, dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2023.53.52-62.
- ДСТУ Кривенко О. П., Лізунов П. П., Ворона Ю. В., Калашніков О. Б. Використання моментної схеми скінченних елементів при дослідженні тонких пружних оболонок неоднорідної структури. *Управління розвитком складних систем*. Київ, 2023. № 53. С. 52 – 62, dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2023.53.52-62.