

DOI: 10.32347/2412-9933.2023.53.80-90

УДК 539.1+517.938

Клапченко Василь ІвановичКандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри фізики, <https://orcid.org/0000-0002-4093-5500>

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

Кузнецова Ірина ОлександрівнаАсистент кафедри фізики, <https://orcid.org/0000-0003-1800-1733>

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

Краснянський Григорій ЮхимовичКандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри фізики, <https://orcid.org/0000-0002-2421-1270>

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

**ФРАГМЕНТОВАНА ФІЗИЧНА СТАТИСТИКА ТА ПРОЦЕСИ
САМОУПОРЯДКУВАННЯ В СКЛАДНИХ СИСТЕМАХ**

***Анотація.** Пропонована робота є продовженням двох попередніх робіт, присвячених спробі оцінити внесок просторового безладдя молекулярних систем в їх особливих станах (критичних точках переходу рідина – пара). Залучення фрактального моделювання до динамічних стохастичних систем дало змогу виокремити два статистичних множники GN та FZ, які ґрунтуються на розрізненості способів взаємодії частинок (GN) та врахуванні руху системи як такої у фазовому просторі (FZ). Ці множники формують основу фізичної статистики, яка спирається на глибоке розуміння видів взаємодій та їх наслідків. Крім того, показано, що множники фізичної статистики GN та FZ мають різне наповнення при застосуванні їх до систем з квантовим характером взаємодій або до інших елементів фазового простору. В результаті виникла ідея про можливість формування фрагментованої фізичної статистики, яка б диференціювала як способи взаємодій між частинками систем, так і окремі елементи фазового простору, маючи на меті виділення загальних закономірностей, що притаманні їх особливим станам. Формуванню такої фрагментованої фізичної статистики та окремим результатам її застосування і присвячена ця робота. Головним надбанням запропонованого способу розгляду статистичних задач є переосмислення фазового простору динамічних стохастичних систем, в якому можна виокремити (як окремий елемент фазового простору) простір тілесних кутів орієнтації імпульсів (чи хвильових векторів) частинок систем. Відповідно з'являється додаткова складова ентропії систем в особливих станах – орієнтаційна складова ентропії. Єдиною причиною появи додаткової орієнтаційної складової ентропії у всіх випадках виступає механізм моноенергетизації спектру частинок, фізична природа якого може бути надзвичайно різноманітною. Проте статистичний результат завжди однаковий: різке зростання орієнтаційної складової ентропії з виникненням виокремленого в системі напрямку. Цей напрям може бути властивим системі або нав'язаним їй зовнішнім впливом – тоді подібне упорядкування в системах називатимемо генерацією. Якщо ж виокремлений напрям виникає спонтанно, тоді називатимемо це самоупорядкуванням. Часто таке самоупорядкування також носить стохастичний характер, наприклад, турбулентність. Остаточний висновок роботи такий: зростання ентропії в системах відбувається не лише при наближенні їх до стану рівноваги, але і при появі процесів самоупорядкування в них.*

Ключові слова: стохастичні процеси; локальні взаємодії; далекодії; групові квантові далекодії; масштабна інваріантність; розрізненість; фазовий простір; фізична статистика; статистична вага; мікроскопічні параметри порядку; ентропія; псевдофермієвський та псевдобозевський розподіли; виокремлений напрям; спонтанне самоупорядкування

Вступ

У попередніх роботах [1; 2] авторами проведені теоретичні дослідження з оцінки просторового безладдя в молекулярних системах. Показано, що при наближенні до особливих точок молекулярної

системи (критичних точок переходу рідина – пара) досягається висока ефективність моделювання при залученні фрактального підходу, який дає змогу проведення детального аналізу стохастичних систем.

Зокрема встановлено, що при фрактальному моделюванні статистичну вагу Ω_s окремого

макророзподілу виокремленої частини системи (генератора фракталу з n частинок в m просторових комірках) слід розраховувати як добуток тільки двох множників *фізичної статистики*. Перший множник $G_N = n!/(n_1! \dots n_m!)$ ґрунтується на *розрізненості* видів взаємодій при *нерозрізненості* самих частинок. У випадку відсутності двочастинкових взаємодій $G_N \equiv 1$. В основу другого множника $F_Z = m!/(k_1! \dots k_m!)$ покладена ергодична теорема, тобто він враховує рух системи у фазовому просторі, елементи якого *нерозрізнені*. При розрізненості елементів фазового простору $F_Z \equiv 1$.

Ефективність застосування фрактального підходу для визначення ентропії системи за рахунок просторового безладдя активувала наші зусилля на подальшу диференціацію фазового простору з метою оцінки внесків інших складових фазового простору в ентропію системи. Це стало спробою особливого диференційованого підходу до постановки статистичних задач, який ми назвали *фрагментованою фізичною статистикою*.

Мета статті

Метою роботи є обґрунтування необхідності введення *фрагментованої фізичної статистики* як проміжного етапу розвитку статистичної фізики, яка набуватиме здатності до описання більш широкого кола явищ у системах тотожних частинок з динамічним хаосом. При цьому в таких системах має зникати необхідність у залученні до пояснення критичних явищ додаткових підходів і теорій, таких як синергетика [3], масштабна інваріантність [4], ренормгруповий підхід [5] тощо.

Постановка проблеми

Введення фрагментованої фізичної статистики

Класичні системи. Постановку задачі фрагментованої фізичної статистики розглянемо на прикладі молекулярної системи одноатомних молекул з кількістю частинок N в об'ємі V , яка має певну температуру T .

Для статистичного опису такої термодинамічної системи загально прийнятим є використання масиву $N \times \{p_{x_i}, p_{y_i}, p_{z_i}, x_i, y_i, z_i\}$ невизначених мікропараметрів системи, правильне усереднення яких повністю передбачало б її поведінку [6]. Така постановка передбачає введення 6-вимірного координатно-імпульсного фазового простору, в якому відбувається рух і взаємодія частинок системи. Враховуються лише *двочастинкові локальні* міжмолекулярні взаємодії.

Отже, для описання критичних явищ в таких та подібних їм системах, запропоновано використання

параметрів порядку – деяких макроскопічних величин, які в рамках теорії Ландау [6; 7] описують поведінку фізичної системи при фазових переходах II роду. Ідея з введенням параметрів порядку в подальшому була розвинута і досягла найбільшого узагальнення в ренормгруповому підході [5].

Ця ідея про можливість залучення уявлень про параметри порядку використана нами для постановки задачі фрагментованої фізичної статистики. В такому підході та ж сама статистична задача розглядається на масиві $N \times \{\vec{p}_i, \Delta V_i\}$, де елементи об'єму ΔV_i , доступні молекулам, та вектори імпульсів молекул \vec{p}_i виступають *мікроскопічними параметрами порядку* системи. Тоді легко побачити, користуючись узагальненнями [5], що статистична задача розпадається на три складові частини, або *фрагменти*.

Мікроскопічний параметр порядку ΔV_i є скаляром, тобто параметром з вимірністю 1 [5], що допускає постановку окремої статистичної задачі розподілу молекул за елементами об'єму системи ΔV_i . Масмо перший фрагмент статистичної задачі.

Водночас параметр порядку \vec{p}_i є вектором, тобто має вимірність 2, отже, повинен представлятись двома масивами, один з яких описує модуль вектора $|\vec{p}_i| = p_i$, а другий – його просторову орієнтацію. Тоді на масиві модулів векторів імпульсу виникає другий фрагмент статистичної задачі – розподіл частинок за елементами фазового простору імпульсів $4\pi p^2 dp$, або, що є еквівалентним, за елементами простору енергій частинок dW .

Здати просторову орієнтацію векторів у вигляді однорідного масиву можна лише розбивши простір тілесних кутів $\theta = 4\pi$ на елементи $\Delta\theta_i$ в кількості, не меншій кількості частинок у системі. Тобто ввівши в розгляд елемент фазового простору тілесних кутів, що дорівнює $\Delta\theta = 4\pi/N$. Тоді на масиві елементів тілесних кутів можна сформулювати третій фрагмент статистичної задачі.

Отже, фрагментована фізична статистика для класичних ансамблів взаємодіючих частинок розпадається на суму трьох фрагментів, трьох окремих статистичних задач. Кожна з них визначає внесок в ентропію системи за рахунок безладдя (чи упорядкування?) у відповідних елементах фазового простору. Цим внеском можна надати відповідні назви: *просторової* S_V , *енергетичної* S_W та *орієнтаційної* S_θ складових ентропії. Враховуючи те, що обчислення ентропії відбувається з точністю до невизначеної константи, будемо завжди визначати лише зміну ентропії при змінах параметрів системи:

$$\Delta S = \Delta S_V + \Delta S_W + \Delta S_\theta. \quad (1)$$

Квантові системи. Квантові системи в порівнянні з класичними мають, як мінімум, три відмінності. По-перше, частинки подібних систем розглядаються як хвильові утворення, тобто не підлягають координатному описанню. По-друге, в цих системах враховуються лише *одночастинкові квантові* взаємодії (кожної окремої частинки з квантовою системою в цілому), які описуються відповідним рівнянням квантової механіки [7]. По-третє, фазовий простір енергій таких систем – квантований, інакше кажучи, в якості фазового простору можуть виступати квантові стани Z_i з певними значеннями енергії W_i .

Тому задача статистики квантових систем ставиться на меншому масиві $N \times \{ \vec{k}_i \}$ *мікроскопічних параметрів порядку* – масиві хвильових векторів $\vec{k}_i = \vec{p}_i / \hbar$ частинок-хвиль.

Враховуючи, що такий параметр порядку теж має вимірність 2, за аналогією з наведеною вище аргументацією, приходимо до двокомпонентної фрагментованої фізичної статистики, в якій приріст ентропії слід розраховувати так:

$$\Delta S = \Delta S_W + \Delta S_\theta. \quad (2)$$

Тобто, аргументуючи появу слова «фрагментована» в назві нашого підходу, ми тим самим підкреслюємо, що в статистичних задачах як для класичних, так і для квантових систем завжди має бути наявна *орієнтаційна* складова ентропії ΔS_θ , яка до цього ніким не враховувалась.

Фізичні взаємодії. Отже, спробуємо обґрунтувати наявність в назві словосполучення «фізична статистика». По-перше, в роботі [2] ми цілий розділ присвятили роз'ясненню відмінностей у розв'язанні задач математичною та фізичною статистиками. Там показано, що наведені в передмові до цієї статті статистичні множники G_N та F_Z мають інше тлумачення порівняно з [8; 9]. По-друге, гіпотеза про універсальність та теорія масштабної інваріантності всіх критичних явищ [4] (включно з усіма фазовими переходами II роду, генерацією лазерів, явищами в потоках рідин та газів та навіть явищами перколяції [10]) не могли б повстати, якби не існувало єдиної фізичної причини та єдиного способу її впливу на поведінку систем незалежно від типу частинок, класичного чи квантового способу описання їхнього руху та взаємодії, умов виникнення тощо. Це означає, що статистична фізика, яка здатна описувати подібні явища, не повинна бути переобтяженою великою кількістю деталей конкретного явища.

Нами вже було розглянуто молекулярну систему з точки зору теорії перколяції та навіть сформульовано перколяційну теорему [11]. Там область критичних явищ завжди супроводжувалась тим, що наставав ефект *моноенергетизації* спектру частинок. Як з'ясувалось, той же ефект

моноенергетизації притаманний всім без винятку критичним явищам [6; 7], незалежно від того, виникли вони завдяки зміні параметрів системи чи за рахунок зовнішніх впливів.

Отже, якщо в спектрі частинок виникає окрема моноенергетична група N_{mono} , то фізична статистика повинна передбачати переважне перебування частинок цієї групи в хвильовому представленні та їх *двочастинкову квантову далекодію*, обумовлену взаємним перекриттям хвильових пакетів. Обґрунтування такої поведінки моноенергетичної групи частинок наводилось нами в [12]. Базувалось воно на тому, що довжина хвиль де Бройля матеріальних частинок визначається через їхню відносну швидкість $\lambda_{дБi,j} = \hbar / m_i \cdot v_{ij}$, яка для частинок з однаковим за величиною та напрямом імпульсом стає *макроскопічною*.

Насправді з прикладами такого типу взаємодій ми знайомі. Нагадаємо лише два випадки: *вимушене резонансне випромінювання* для лазерних систем та *виникнення куперівських пар* в явищі надпровідності [7]. На енергетику системи їхній вплив не такий значний, проте на просторову орієнтацію імпульсів частинок вплив може стати визначальним. Можна навіть передбачати, що при появі концентрованих груп таких орієнтованих частинок з близькими напрямками проявить себе *групова квантова далекодія*, яка буде закріплювати їх виділену просторову орієнтацію.

Підіємо підсумки. Фрагментована фізична статистика розглядає загальну статистичну задачу як складену з фрагментів статистичних задач для окремих елементів фазового простору. Як особливість, в ній завжди присутній фрагмент, який розраховує орієнтаційну складову.

Детальний аналіз фрагментів статистичних задач передбачається розглядати за допомогою двох фізичних статистичних множників G_N та F_Z . Застосування цих множників ґрунтується на такій класифікації видів взаємодій в системах частинок:

А. Двочастинкова локальна міжмолекулярна (міжчастинкова) взаємодія.

В. Одночастинкова квантовомеханічна взаємодія (частинки із системою в цілому).

С. Двочастинкова квантовомеханічна далекодія.

Д. Групова квантовомеханічна далекодія.

Виклад основного матеріалу

Зрозумілим є бажання присвятити подальшу частину роботи аналізу окремого фрагменту статистичної задачі, в якому розглядається внесок орієнтаційної складової ентропії. Власне ми так і зробимо, але для формування системного підходу до фрагментованої фізичної статистики коротко

привернемо увагу на особливості застосування для різних випадків статистичних множників G_N та F_Z (або G_n та F_m , якщо їх застосовувати до генераторів фракталу системи).

Застосування фізичних статистичних множників

Просторова складова ентропії. Ці розрахунки притаманні тільки класичній системі частинок, яскравим прикладом якої може бути звичайна система молекул, описана в постановці задачі. До названих там загальних характеристик системи (N, V, T) слід додати величину, що характеризує даний тип молекул. Найпростішою є V_{0c} , тобто об'єм, який займає одна молекула в конденсованому стані. Тоді можна ставити статистичну задачу, увівши до розгляду кількість просторових фазових комірок Z_V , в яких може перебувати одна з молекул: $Z_V = V/V_{0c}$.

Розглянемо лише випадок розрідженого газу, коли, як мінімум, виконується співвідношення $Z_V/N > 5$. Випадки з меншим співвідношенням розглянуто в [1; 2] із залученням фрактального моделювання.

Легко бачити, що при такому виборі розміру просторових комірок у молекулярній системі завжди реалізується тільки один тип розподілу частинок по фазових комітках: N комірок зайняті однією молекулою, а $(Z_V - N)$ комірок – порожні. Це нагадує розподіл фермі-частинок, проте в цьому випадку називатимемо його *псевдофермієвським* розподілом.

Причина полягає в тому, що статистичну вагу даного макророзподілу Ω_s в такій системі описує не один множник типу F_Z , як це було в квантовій статистиці [6]:

$$F_Z = \frac{Z_V!}{k_1! \cdots k_{Z_V}!} = \frac{Z_V!}{N!(Z_V - N)!}, \quad (3)$$

а обидва фізичних множники. Враховуючи наявність двочастинкових взаємодій в системі, множник G_N буде дорівнювати:

$$G_N = \frac{N!}{N_1! \cdots N_{Z_V}!} = \frac{N!}{\underbrace{1! \cdots 1!}_N \cdot \underbrace{0! \cdots 0!}_{Z_V - N}} = N! \quad (4)$$

Тоді термодинамічна ймовірність стану системи Ω збігатиметься із статистичною вагою єдиного типу розподілів Ω_s і дорівнюватиме:

$$\Omega = \Omega_s = G_N F_Z = \frac{Z_V!}{(Z_V - N)!} \approx (Z_V)^N. \quad (5)$$

Звідси для приросту просторової складової ентропії легко отримати вираз:

$$\Delta S_{V,1,2} = k \ln(\Omega_{V_2} / \Omega_{V_1}) = kN \ln V_2 / V_1, \quad (6)$$

добре відомий в термодинаміці [13] та виведений з інших статистичних міркувань [14].

Енергетична складова ентропії. Класична фізика. Постановка статистичної задачі у фазовому просторі енергій W може видатися найпростішою

з огляду на те, що призначенням малого інтервалу dW отримуємо нескінченний ряд енергетичних фазових комірок Z_i , в яких перебуває певна кількість частинок N_i з визначеними значеннями енергії $W_i = W_0 + idW$.

Легко зрозуміти, що при цьому енергетичні фазові комірки стають розрізненими, що автоматично робить статистичний множник F_Z рівним одиниці: $F_Z \equiv 1$. Тоді для класичних систем, яким притаманна локальна двочастинкова взаємодія, термодинамічну ймовірність стану системи визначатиме лише статистичний множник G_N :

$$\Omega_w = G_N = \frac{N!}{N_1! \cdots N_i!}. \quad (7)$$

Якщо до співвідношення (7) додати закон збереження кількості частинок і закон збереження енергії, то застосувавши метод Лагранжа для пошуку максимуму (7), отримаємо найбільш імовірний розподіл частинок за енергією, відомий як розподіл Максвелла – Больцмана [6].

Квантова фізика. Відмінність квантових систем в тому, що замість локальних двочастинкових взаємодій, характерних для класичних систем, у них розвинуті одночастинкові квантові взаємодії із системою в цілому. А відсутність двочастинкових взаємодій призводить до того, що множник G_N стає рівним одиниці: $G_N \equiv 1$. При цьому, якщо в якості фазових комірок обирати інтервали енергій, тоді і множник $F_Z \equiv 1$. І видається, що задача перестає бути статистичною.

Проте це не так. Статистичний характер в таку систему вносить сама одночастинкова квантова взаємодія. Зводиться вона до появи в системі допустимих дискретних рівнів енергії, ймовірність заповнення яких також може відрізнитись. Зокрема, якщо в кожному i -му інтервалі енергій допустимими є Z_i невідроджених квантових станів системи, які можуть бути заповненими N_i частинками ($N_i < Z_i$), то статистичну задачу можна переформулювати, обравши в якості нерозрізнених фазових комірок Z_i квантових станів. При цьому слід враховувати те, що принципову відмінність в ймовірність заповнення квантових станів вносить принцип Паулі [7], що приводить до двох різних задач.

Системи ферміонів. Якщо для частинок системи справедливий принцип Паулі, то єдиним типом розподілу їх по квантових станах буде такий: N_i станів зайняті однією частинкою, а всі інші $(Z_i - N_i)$ – порожні. Враховуючи, що $G_N \equiv 1$, статистичну вагу розподілу для i -го інтервалу енергій визначатиме лише множник F_{Z_i} :

$$F_{Z_i} = \frac{Z_i!}{k_1! \cdots k_{Z_i}!} = \frac{Z_i!}{N_i!(Z_i - N_i)!}. \quad (8)$$

Тоді термодинамічна ймовірність стану всієї системи визначатиметься добутками (8) для всіх інтервалів енергії:

$$\Omega_w = \prod_i F_{Z_i} = \prod_i \frac{Z_i!}{N_i!(Z_i - N_i)!} \quad (9)$$

А далі – традиційно. Якщо до співвідношення (9) додати закон збереження кількості частинок і закон збереження енергії, то застосувавши метод Лагранжа, отримаємо найбільш імовірний розподіл частинок за енергією, відомий як розподіл Фермі – Дірака [6].

Системи бозонів. За одних і тих самих умов такі системи, поведінка частинок яких не обмежена принципом Паулі, мають значно більшу кількість способів реалізації, ніж системи ферміонів. Для прикладу в таблиці наведено допустимі типи розподілів бозонів для підсистеми з кількістю частинок $N_i = 4$ та кількістю квантових станів $Z_i = 5$. Там же наведено статистичні ваги окремих типів розподілів частинок F_Z , статистичну вагу стану підсистеми в цілому і дещо інше, що розглядатимемо далі.

Таблиця – Статистичні ваги F_{Z_s} розподілів та ймовірність стану Ω_i підсистеми бозонів $N_i=4, Z_i=5$

Номер розподілу s	Тип розподілу	F_{Z_s}
1	4, 0, 0, 0, 0	5
2	3, 1, 0, 0, 0	20
3	2, 2, 0, 0, 0	10
4	2, 1, 1, 0, 0	30
5	1, 1, 1, 1, 0	5
Сума	$\sum_N^Z = \frac{(Z_i + N_i - 1)!}{N_i!(Z_i - 1)!} = 70$	70
Ω_i	$\Omega_i = \sum_s F_{Z_i,s}^2 / \sum_s F_{Z_i,s}$	20,7

Найперше, що дає змогу зробити таблицю – це порівняти аналогічні підсистеми бозонів та ферміонів. Наприклад, розподіл 5 у таблиці виділено жирним шрифтом. Це той єдиний розподіл, який допустимий для ферміонів. Відповідно, його статистична вага – найнижча порівняно з будь-яким іншим з багатьох розподілів для бозонів. Ще відчутнішою буде ця відмінність, якщо порівнювати її із сумою статистичних ваг для всіх розподілів, допустимих в системах бозонів.

Для скорочення викладок будемо діяти так. На сьогодні загально прийнято [6; 12; 13] термодинамічну ймовірність подібних підсистем бозонів визначати так:

$$\Omega_{w_i} = \sum_N^Z = \frac{(Z_i + N_i - 1)!}{N_i!(Z_i - 1)!} \quad (10)$$

Тоді термодинамічну ймовірність стану всієї системи слід знаходити, відповідно, як добуток (10):

$$\Omega_w = \prod_i \Omega_{w_i} = \prod_i \frac{(Z_i + N_i - 1)!}{N_i!(Z_i - 1)!} \quad (11)$$

Продовження – за знайомою нам схемою. Якщо до співвідношення (11) додати закон збереження енергії і застосувати метод Лагранжа, то отримаємо найбільш імовірний розподіл частинок за енергією, відомий як розподіл Бозе – Ейнштейна [6].

Зробимо важливе зауваження. Воно є додатковим підтвердженням необхідності посиленої уваги при формуванні положень фізичної статистики. Зокрема, ми свідомі того, що використане в якості термодинамічної ймовірності співвідношення (10) є не повністю коректним. Вказану обставину ми підкреслили вже в самій формулі (10), ввівши додаткове позначення цієї величини \sum_N^Z . Оскільки вона є виключно математичним множником, що визначає повну кількість допустимих перестановок у системі [14]. І це число правильне (див. таблицю), проте воно не визначає фізичну суть.

А суть полягає в тому, що в момент реалізації в підсистемі одного з допустимих типів макророзподілів (наприклад, розподілу 4 в таблиці), всі інші типи розподілів вже фізично неможливі. Тобто в кожному довільний момент часу ми маємо лише один макророзподіл у підсистемі зі своїм значенням термодинамічної ймовірності. То якою ж, в середньому, є ця термодинамічна ймовірність?

У статистичній фізиці доведено [13], що середнє значення в часі збігається із середнім по ансамблю. Тоді відносну частину часу w_s , коли підсистема перебуває в стані з даним типом розподілу s , визначимо так:

$$w_s = \frac{F_{Z_i,s}}{\sum_s F_{Z_i,s}} \quad (12)$$

а усереднене в часі значення статистичних ваг окремих типів розподілів дасть термодинамічну ймовірність підсистеми Ω_i :

$$\Omega_i = \sum_s w_s \cdot F_{Z_i,s} = \frac{\sum_s F_{Z_i,s}^2}{\sum_s F_{Z_i,s}} \quad (13)$$

У нашому прикладі (таблиця) термодинамічна ймовірність підсистеми $\Omega_i = 20,7$, в той час як повна кількість допустимих реалізацій $\sum_N^Z = 70$, причому для величини \sum_N^Z завжди справедливим є співвідношення:

$$\sum_s F_{Z_i,s} = \sum_N^Z = \frac{(Z_i + N_i - 1)!}{N_i!(Z_i - 1)!} \quad (14)$$

Тому при проведенні детальних досліджень таких підсистем на відмічені деталі слід звертати особливу увагу. Водночас нами перевірено, що величина Ω_i за формулою (13) завжди пропорційна \sum_N^Z (14). Тобто використання величини \sum_N^Z замість

Ω_i у формулі (10) (для знаходження максимуму статистичного розподілу) можна вважати виправданим.

Орієнтаційна складова ентропії

Попередні зауваження

Оцінювання орієнтаційної складової ентропії ми проводимо вперше, а тому дуже важливо зробити правильні початкові установки, акцентувати увагу на ідеалізаціях та спрощеннях, запропонувати зручний спосіб візуалізації. І, бажано, не пропустити можливі загальнення чи допустиму універсалізацію.

По-перше, почнемо з того, що розрахунки орієнтаційної складової ентропії повинні бути універсальними і не розділяти класичні системи частинок від квантових. Та навіть більше того, не розділяти системи ферміонів від систем бозонів. Запорукою такої універсальності є те, що відмінною від нуля ця ентропія стає лише при появі взаємодії типу С – двочастинкової квантової далекодії, яка в хвильовому представленні притаманна будь-яким частинкам.

З тієї ж причини зникає відмінність між системами ферміонів та бозонів, тому що перший акт взаємодії типу С переводить ферміони в клас бозонів – створюються куперівські пари. Залишається лише підкреслити, що у випадку ферміонів за моноенергетичну кількість частинок N_{mono} необхідно приймати цю кількість куперівських пар.

По-друге, методика застосування та розрахунків повинна бути уніфікованою та не має залежати від того, яку групу частинок вона описує. Це може бути весь склад частинок системи N чи його виділена частина N_{mono} . Методика є застосовною лише з одним припущенням: кількість цих частинок залишається незмінною. Тобто весь процес розгляду передбачає $N = \text{const}$ або $N_{mono} = \text{const}$, що не зовсім зручно, тому що реальність може диктувати інше. Для методики це важливо, бо пов'язано з необхідністю мати однаковий елемент фазового простору $\Delta\theta = 4\pi/N$ (або $\Delta\theta = 4\pi/N_{mono}$), який завжди вводиться так, щоб кількість фазових комірок Z_θ збігалася з кількістю частинок N чи N_{mono} .

По-третє, необхідна певна візуалізація процесів, які ми збираємось обговорювати. Простір тілесних кутів у нашій уяві завжди асоціюється зі сферою, прообразом якої є плоска фігура (перетин сфери) – коло. Це те саме, що й припущення про однаковість модулів імпульсів всіх частинок, але різну їхню орієнтацію у сферичному просторі.

У результаті ми прийшли до рисунку, який схематично відображає три стани просторових розподілів частинок по кутових комітках.

Зокрема на рис., *a* відображено стан ізотропії системи частинок. Цей стан може бути як у всієї множини частинок N , так і в будь-якої її частини –

N_{mono} чи $(N - N_{mono})$. При появі взаємодії типу С (рис., *б*) виникає анізотропія з хаотичним характером розподілу. Цей розподіл притаманний лише множині частинок системи N_{mono} . А рис., *в* представляє той стан частини системи N_{mono} , в якій проявилась взаємодія типу D, причому в ній додатково створено виділений напрямок, показаний як вісь x .

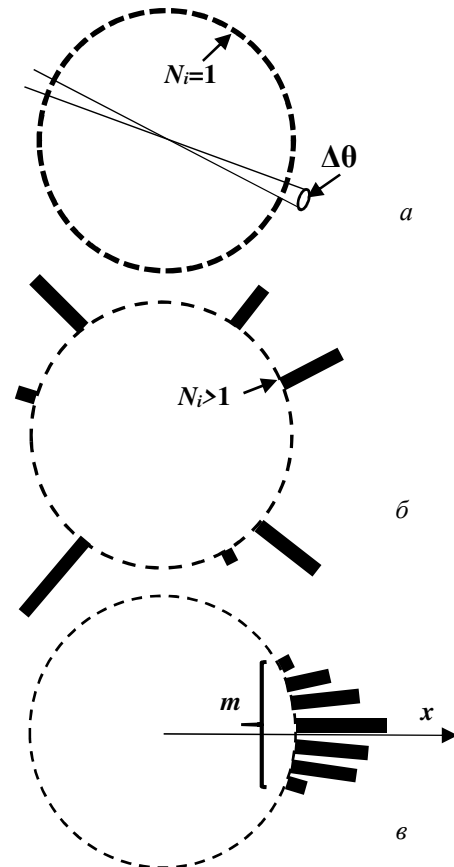


Рисунок – Схематичне відображення характеру просторового розподілу частинок за тілесними кутами: *a* – у випадку ізотропії; *б* – при появі двочастинкової далекодії; *в* – при прояві групової далекодії та в припущенні існування притаманного системі виділеного напрямку

Стан ізотропії

Важливо підкреслити одну обставину, яка важко сприймається людським мозком: ізотропія – це не максимальний хаос, як нам видається, а скоріше *орієнтаційний детермінізм*. Ізотропія завжди притаманна системам, які далекі від особливих точок, і забезпечується тим, що між частинками системи відбуваються виключно взаємодії типу А та В. Обидва ці механізми забезпечують на макро- та мікрорівнях точне виконання законів збереження та врахування початкових умов при взаємодіях. Тому конкретна орієнтація конкретної частинки здається нам випадковістю, а насправді вона є точно визначеною величиною.

Схематичне відображення ізотропії для всієї системи з N частинок (рис., *a*) можна підсилити

такою ідеалізацією. Уявімо собі, що в один момент модулі імпульсів частинок стали рівними за величиною. Тоді для забезпечення рівності нулю сумарного імпульсу системи необхідно, щоб віяло векторів імпульсів рівномірно розподілялося по тілесних кутах. Враховуючи, що в нашій методиці $Z_0 = N$, то очевидно, що кількість частинок в одній фазовій комірці $N_i = 1$.

У реальних системах одиниці дорівнюватиме лише середнє значення частинок в одній фазовій комірці: $\bar{N}_i = 1$. Такі розподіли частинок за елементами тілесних кутів будемо називати *бозевсько-фермієвськими*. Бозевські – тому що відсутня заборона мати орієнтацію в одному елементі тілесних кутів двом і більше частинкам. А фермієвські – тому що реалізується лише один тип макророзподілів у системі: N фазових комірок зайняті однією частинкою, а $Z_0 - N = 0$ – порожні (див. розподіл 5 в таблиці).

Тоді термодинамічну ймовірність $\Omega_{\theta(\text{ізотр})}$ ізотропного стану системи частинок визначатиме лише множник $F_{Z_0} = Z_0! / (k_1! \cdot \dots \cdot k_{Z_0}!)$, де числа k_{Z_i} – кількості однаково заповнених фазових комірок:

$$\Omega_{\theta(\text{ізотр})} = F_{Z_0} = \frac{Z_0!}{N!(Z_0 - N)!} = \frac{N!}{N!0!} = 1. \quad (15)$$

Звідки орієнтаційна складова ентропії для системи з ізотропним розподілом імпульсів частинок:

$$S_{\theta(\text{ізотр})} = k \ln \Omega_{\theta(\text{ізотр})} = 0. \quad (16)$$

Отже, ізотропія – це стан системи з нульовим значенням орієнтаційної складової ентропії.

Системи в особливих станах

У межах системи з N частинок при наближенні її до особливих точок виділяється група частинок з однаковою енергією $N_{mono} < N$, прерогативою якої є переважання між частинками цієї групи взаємодій типу С, а потім і D. За рахунок двочастинкової квантової взаємодії серед частинок групи N_{mono} починають виникати мікрогрупи просторово упорядкованих частинок, напрям яких має випадковий характер. Цей проміжний стан відображено на рис., б. Характерно, що більшість часу частинки N_{mono} перебувають у хвильовому представленні і все менше відчують локальні взаємодії типу А та В.

Власне саме з цього моменту оцінювання орієнтаційної складової ентропії в нашій методиці постають дві проблеми. Перша стосується формальної сторони підходу. За цією формальною ознакою наявність двочастинкових взаємодій типу С означає необхідність введення фізичного множника G_N поряд з традиційним для бозевського розподілу множником F_Z . Тобто такий розподіл слід іменувати

псевдобозевським. Проте фізично зрозуміло, що переходи частинок між зародками упорядкованих груп з великими лінійними кутами відхилення не можливі або мало ймовірні, оскільки відсутні перекриття їх хвильових представлень. З одного боку, множник допустимий, а з іншого – його дія обмежена тільки тими випадками, коли зародки упорядкованих груп частинок розташовані поряд.

Друга проблема зводиться до того, що ми не маємо досвіду врахування групової далекодії. Проте фізично зрозуміло, що прояв її буде призводити до кутового зближення зародків упорядкованих груп. Після аналізу вказаних проблем ми дійшли висновку про те, що фізична обґрунтованість необхідності застосування множника G_N завжди збігається з випадками, коли в системі проявилась групова далекодія.

Такий випадок і відображає представлений на рис., в стан системи, який в нашій методиці моделює фінальне самоупорядкування для систем з виділеним напрямом. На цій стадії упорядкування можна бути впевненим в тому, що всі первинні зародки упорядкованих груп розташовуються поряд. Тобто тут повністю проявилась групова взаємодія і повністю виконані умови для застосування множника G_N . Дійсно, врахування групової взаємодії еквівалентно включенню в розрахунок термодинамічної ймовірності множника G_N .

Множник F_Z є застосовним на всіх стадіях процесу. Проміжну стадію визначає лише він (рис., б):

$$\Omega_{\theta \text{пр}} = F_Z = \frac{Z_0!}{(Z_0 - m)! k_1! \cdot \dots \cdot k_m!}, \quad (17)$$

де числа k_1, k_2, \dots, k_m – кратність однаково заповнених фазових комірок; m – кількість заповнених комірок. Легко бачити, що множник F_Z завжди має два мінімальних значення (таблиця, розподіли 1 та 5) при $m = Z_0$ і при $m = 1$. Проміжні значення завжди більші та обов'язково є максимальне значення (таблиця, розподіл 4). Для максимуму в нашому випадку отримаємо найкоротший вираз за умови, що числа заповнення комірок $N_1 \dots N_m$ всі різні (тоді всі $k_m = 1$):

$$\Omega_{\theta \text{пр}} = \frac{N_{mono}!}{(N_{mono} - m)!} \approx (N_{mono})^m. \quad (18)$$

Та починаючи з області максимуму аж до розподілів з $m = 1$ термодинамічна ймовірність $\Omega_{\theta m}$ визначатиметься добутком множників F_Z (17) та множника G_N :

$$G_N = \frac{N_{mono}!}{\underbrace{0! \cdot \dots \cdot 0!}_{Z_0 - m} N_1! \cdot \dots \cdot N_m!}, \quad (19)$$

за умови

$$\sum_{i=1}^m N_i = N_{mono}. \quad (20)$$

Попередній аналіз співвідношень (17)–(19) показує, що вони описують поведінку орієнтаційної складової ентропії ΔS_0 як залежність такого типу: нульове значення ΔS_0 в стані ізотропії, подальше її зростання до максимуму на стадії самоупорядкування та невинне її спадання до нуля при примусовому упорядкуванні зовнішніми умовами ($m \rightarrow 1$).

Результат неординарний. Проте остаточні висновки робити рано. Оскільки подібні розрахунки проводяться вперше, то дуже важливо, щоб отриманий результат знаходив підтвердження з інших фізичних міркувань.

Доступний фазовий простір та ентропія

Статистична фізика стверджує [13], що термодинамічна ймовірність системи Ω з N частинок завжди пропорційна (іноді – дорівнює) загальному об'єму фазового простору Γ , доступному всім частинкам:

$$\Omega \sim \Gamma = \prod_{i=1}^N (\Delta\Phi_i) = (\Delta\Phi_i)^N, \quad (21)$$

де $\Delta\Phi_i$ – об'єм фазового простору, доступний кожній окремо взятій частинці. Враховуючи пропорційність, (21) завжди використовують для визначення приросту ентропії:

$$\Delta S_{1,2} = k \ln \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}. \quad (22)$$

Дієвість та надійність цього способу визначення приростів ентропії видається дуже високою. Наприклад, для приросту просторової складової ентропії розріджених газів, враховуючи $\Delta\Phi_i=V$, відразу отримуємо:

$$\Delta S_{V_{1,2}} = kN \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (23)$$

Аналогічно, для нашого прикладу молекулярної системи, визначається приріст енергетичної складової ентропії, якщо взяти $\Delta\Phi_i \sim (p_{cp})^3 \sim T^{3/2}$:

$$\Delta S_{W_{1,2}} = k \frac{3}{2} N \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (24)$$

Обидва випадки відомі в термодинаміці [13; 14] і описують ізотермічне розширення (23) та ізохоричне нагрівання (24). Спробуємо за подібною схемою розглянути приріст орієнтаційної складової ентропії.

Допустимий простір тілесних кутів. Відразу попередимо, що швидкого отримання кінцевого результату не буде. В попередніх прикладах ми мали справу з фазовими просторами *фізичних величин*. Фазовий простір тілесних кутів є уявним *математичним простором*. На просте запитання про допустимий простір тілесних кутів для частинок

системи в стані ізотропії могла бути тільки одна відповідь: 4л. Що одночасно і так, і не так. «Так», тому що допустимі просторові орієнтації імпульсів кожної частинки дійсно розташовуються в межах тілесного кута 4л.

Пояснення, чому це «не так», потрібно почати з підкреслення двох моментів. Перший момент: описуючи ізотропію, ми назвали її орієнтаційним детермінізмом. Тобто частинкам системи притаманні лише взаємодії типу А та В, а закони збереження на макро- та мікрорівнях визначають в кожному акті взаємодії просторову орієнтацію кожної частинки. «Точність» цієї орієнтації формально визначається введеним нами елементом тілесного кута $\Delta\theta$. До наступного акту взаємодії типу А та В вийти за межі цього елемента частинка не може. Це – ізотропія.

А є другий момент, який обговорений нами в постановці задачі. Стосується він класифікації взаємодій. В окремих станах системи проявляють себе нелокальні взаємодії типу С та D. За рахунок далекодії дві, майже однаково орієнтованих частинки, можуть потрапити в будь-який з цих двох елементів тілесних кутів. Це означає, що доступний кожній частинці фазовий простір зріс до $2\Delta\theta$. Тобто, якщо на фоні локальних взаємодій А та В появляється додаткова орієнтуюча далекодія С, то відповідь на поставлене запитання буде, скоріше, «не так».

Орієнтаційна складова ентропії. Надалі все просто. Будемо вважати, що для підсистеми з N_{mono} частинок у стані ізотропії доступним для однієї частинки простором тілесних кутів є 1 елемент тілесного кута $\Delta\theta$: $\Delta\Phi_i = 1\Delta\theta$. Тоді ентропія такого стану:

$$S_{00} = kN_{mono} \ln 1 \cdot \Delta\theta. \quad (25)$$

Якщо за рахунок двочастинкової далекодії типу С виникають орієнтовані групи по N_i частинок, то допустимий простір кожної з цих частинок зростає до $\Delta\Phi_i = N_i \Delta\theta$. Введемо одне спрощення. Нехай таких орієнтованих груп з різною кількістю частинок виникло m штук. Тоді можна ввести середнє значення кількості частинок $\bar{N}_i = N_{mono} / m$. Це дає:

$$S_{0\bar{N}} = kN_{mono} \ln \bar{N}_i \cdot \Delta\theta. \quad (26)$$

Приріст орієнтаційної складової ентропії визначимо як різницю (26) та (25):

$$\Delta S_{0\bar{N}} = kN_{mono} \ln \bar{N}_i. \quad (27)$$

Продовжуючи попередні міркування для можливості опису всіх стадій процесу упорядкування в системах з нав'язаним виділеним напрямом (рисунок), отримаємо остаточну формулу для орієнтаційної складової ентропії:

$$\Delta S_{\theta} = \begin{cases} kN_{mono} \ln \bar{N}_i & \bar{N}_i < m \\ kN_{mono} \ln m & m < \bar{N}_i \end{cases} \quad (28)$$

Формула (28) описує всі стадії самоупорядкування в системах з виділеним напрямом та підтверджує всі висновки, зроблені в пункті «системи в особливих станах». Крім того, вона дає змогу кількісно оцінювати орієнтаційну ентропію в усіх проміжних станах – від ізотропії до повного упорядкування. Найважливішою кількісною характеристикою, яку можна отримати з (28), є максимальне значення орієнтаційної складової ентропії, яке спостерігається при $m=(N_{mono})^{1/2}$:

$$\Delta S_{\theta_{max}} = k \frac{N_{mono}}{2} \ln N_{mono}, \quad (29)$$

тому що воно залежить лише від одного параметра – N_{mono} .

Спонтанне самоупорядкування

Ми описали системи, в процесі самоупорядкування яких в одному напрямі беруть участь всі частинки N_{mono} . Це системи з виділеним напрямом. Всі такі системи поєднує одне слово – *генерація*. Тому що самоупорядкування в таких випадках завжди приводить до утворення стійких в часі напрямлених потоків. Найближчий прототип – лазер. До таких систем також належать надпровідність, надтекучість, окремі випадки газових течій.

Для таких систем ми маємо не тільки детальну формулу (28), що описує розвиток процесу упорядкування, а й формулу для максимуму орієнтаційної складової ентропії, яка є мірилом упорядкування. А як бути із системами, що не мають виділеного напрямку?

У таких системах процеси самоупорядкування виникають спонтанно і будуть принципово випадковими в часі, в просторовій локації, в просторовій орієнтації, в кількості задіяних частинок, в просторовій протяжності. Ми змодельовали процес спонтанного самоупорядкування, ввівши відносний η лінійний масштаб спонтанного виникнення зародків самоупорядкування l_{sp} порівняно з характерним розміром системи L ($\eta=l_{sp}/L$), та визначили середнє значення ентропії, що його описує:

$$\Delta \bar{S}_{\theta} = \frac{kN_{mono}}{2} \ln \eta^3 N_{mono} < \Delta S_{\theta_{max}}. \quad (30)$$

Очевидним є результат, що приріст ентропії завжди є меншим максимально можливого. Іноді – значно меншим. А залежність величини середньої

ентропії від розмірів області самоупорядкування нагадує масштабну інваріантність.

Обговорення результатів

Найважливішим результатом запропонованої роботи ми вважаємо появу орієнтаційної складової ентропії ΔS_{θ} . Ми майже впевнені в тому, що саме за цією складовою приховується єдина причина та механізм виникнення всієї множини критичних явищ. Тому детальне обговорення всієї множини критичних явищ з врахуванням результатів цієї роботи може стати предметом багатьох наступних публікацій.

З усією очевидністю проглядається основний напрям обговорень та дискусій. При аналізі стану систем, в яких проявились процеси спонтанного самоупорядкування з випадковими в часі, просторі та масштабі явищами, створювалося враження, що з чимось подібним ми вже зустрічались. І дійсно, мова йде про існуючі флуктуаційні, кореляційні теорії та теорію масштабної інваріантності [3–5, 16] при описанні критичних явищ. З огляду на результати цієї роботи подібні теорії варто розглядати як теорії відгуку. Тобто всі названі ефекти та явища є реакцією системи на процеси упорядкувань, інакше кажучи, це компенсація неупорядкованої області системи ($\sim l_{sp}$)³ з кількістю частинок ($\sim(N-N_{mono})$) напрямленого імпульсу, якого набула упорядкована кількість частинок ($\sim N_{mono}$) з цієї області.

На цьому напрямі буде місце як для дискусій, так і для отримання корисних результатів при обговоренні.

Висновки

1. Головним теоретико-практичним надбанням запропонованої роботи є залучення до розгляду статистичних задач в системах тотожних частинок орієнтаційної складової ентропії, обґрунтування її необхідності та розроблення способів її оцінювання.

2. Показано, що процеси самоупорядкування в системах (навіть обмежених та ізольованих) тотожних частинок супроводжуються зростанням ентропії.

3. У необмежених системах тотожних елементів завжди існує висока ймовірність до спонтанного самоупорядкування. Тобто рано чи пізно такі системи здатні самостійно вийти зі стану рівноваги.

4. Найбільшою відомою необмеженою системою тотожних структурних елементів є фізичний вакуум. Тому він є об'єктом з максимальною здатністю до виникнення процесів спонтанного самоупорядкування.

Список літератури

1. Клапченко В. І., Краснянський Г. Ю., Кузнецова І. О., Закревська А. О. Фрактальна модель розвитку складних процесів у молекулярних системах. *Управління розвитком складних систем*. Київ, 2020. № 44. С. 175 – 181.
2. Клапченко В. І., Краснянський Г. Ю., Кузнецова І. О., Гаць К. І. Фрактальне моделювання стохастичних процесів і розвиток статистичних уявлень. *Управління розвитком складних систем*. Київ, 2022. № 49. С. 132 – 140.
3. Хакен Г. Синергетика. Москва: Мир, 1980. 406 с.
4. Ма Ш. Современная теория критических явлений. Москва: Мир, 1980. 296 с.
5. Wilson K. G. Problems in Physics with Many Scales of Length. *Scientific American*, 1979, v. 241, p. 158 – 179.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Москва: Наука, 1964. 568 с.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. Москва: Наука, 1989. 768 с.
8. Пугачёв В. С. Теория вероятностей и математическая статистика. Москва: Физматлит, 2002. 496 с.
9. Больцман Л. Лекции по теории газов. Москва: Госиздат. технико-теоретической литературы, 1953. 556 с.
10. Кирпатрик С. Перколяция и проводимость. В кн.: Теория и свойства неупорядоченных материалов /Под ред. В. Л. Бонч-Бруевича. Москва: Мир, 1977. С. 249 – 292.
11. Клапченко В. І. Перколяційний квантовий релятивістський мир. Київ: ВИПОЛ, 1999. 121 с.
12. Клапченко В. І. Відносність і гравітація. Київ: КНУБА, 2019. 136 с.
13. Толпыго К. Б. Термодинамика и статистическая физика. Киев: Изд-во Киевского университета, 1966. 364 с.
14. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Термодинамика и молекулярная физика. Москва: Наука, 1979. 552 с.
15. Математический энциклопедический словарь /гл. ред. Ю. В. Прохоров. Москва: Сов. энциклопедия, 1988. 847 с.
16. Паташинский А. З., Покровский В. Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. Москва: Наука, 1982. 382 с.

Стаття надійшла до редколегії 05.03.2023

Klapchenko Vasily

PhD (Eng.), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Physics, <https://orcid.org/0000-0002-4093-5500>
Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

Kuznetsova Irina

Assistant of the Department of Physics, <https://orcid.org/0000-0003-1800-1733>
Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

Krasnianskyi Grygorii

PhD (Eng.), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Physics, <https://orcid.org/0000-0002-2421-1270>
Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

FRAGMENTED PHYSICAL STATISTICS AND SELF-ORDERING PROCESSES IN COMPLEX SYSTEMS

Abstract. This paper is a continuation of two previous articles devoted to an attempt to estimate the contribution of the spatial disorder of molecular systems in their particular states (critical liquid-vapor transition points). Using fractal modeling for dynamic stochastic systems made it possible to single out two statistical multipliers, G_N and F_Z , based on the difference between the ways of particle interaction (G_N) and considering the system's motion as such in the phase space (F_Z). These multipliers form the basis of physical statistics based on a deep understanding of the types of interactions and their consequences. In addition, it is shown that the physical statistics multipliers G_N and F_Z have different content when applied to systems with a quantum nature of interactions or other phase space elements. As a result, the idea arose about the possibility of forming fragmented physical statistics, which would differentiate both the interactions between the particles of systems and individual elements of the phase space, aiming to highlight the general patterns inherent in their particular states. The present paper is devoted to forming such fragmented physical statistics and the individual results of its application. The main asset of the proposed method for considering statistical problems is the rethinking of the phase space of dynamic stochastic systems, in which one can single out (as a separate element of the phase space) the space of solid angles of orientation of momenta (or wave vectors) of system particles. Accordingly, an additional component of the entropy of systems in certain states appears – the orientational component of entropy. The only reason for the appearance of an additional orientation component of entropy in all cases is the mechanism of mono energization of the particle spectrum, the physical nature of which can be very diverse. However, the statistical result is always the same: a sharp increase in the orientation component of entropy with the emergence of a direction distinguished in the system. The selected direction can be inherent in the system or imposed on it by external influence – then we will call such ordering in systems generation. If the selected direction arises spontaneously, then we will call it self-ordering process. Often such a self-ordering process is also stochastic, such as turbulence. The paper's conclusion is as follows: the increase in entropy in systems occurs not only when they approach the state of equilibrium but also when self-ordering processes appear in them.

Keywords: stochastic processes; local interactions; long-range actions; group quantum long-range actions; scale invariance; distinguishability; phase space; physical statistics; statistical weight; microscopic order parameters; entropy; pseudo-Fermi and pseudo-Bose distributions; dedicated direction; spontaneous self-ordering

References

1. Klapchenko, Vasily, Krasnianskyi, Grygorii, Kuznetsova, Irina & Zakrevska, Anastasia. (2020). Fractal Model of Development of Complex Processes in Molecular Systems. *Management of Development of Complex Systems*, 44, 175–181.
2. Klapchenko, Vasily, Krasnianskyi, Grygorii, Kuznetsova, Irina & Hats, Kateryna. (2022). Fractal Modeling of Stochastic Processes and Development of Statistical Representations. *Management of Development of Complex Systems*, 49, 132–140.
3. Haken, G. (1980). *Synergetics*. Moscow: Mir, 406.
4. Ma, Sh. (1980). *Modern theory of critical phenomena*. Moscow: Mir, 296.
5. Wilson, K. G. (1979). Problems in Physics with Many Scales of Length. *Scientific American*, 241, 158–179.
6. Landau, L. D. & Lifshits, E. M. (1964). *Statistical Physics*. Moscow: Nauka, 568.
7. Landau, L. D. & Lifshits, E. M. (1989). *Quantum mechanics. Nonrelativistic theory*. Moscow: Nauka, 768.
8. Pugachev, V. S. (2002). *Probability theory and mathematical statistics*. Moscow: Fizmatlit, 496.
9. Boltzmann, L. (1953). *Lectures on the theory of gases*. Moscow: Gosizdat. of technical and theoretical literature, 556.
10. Kirpatrick, S. (1977). Percolation and conductivity. In: *Theory and properties of disordered materials*. Ed. V.L. Bonch-Bruевич. Moscow: Mir, 249–292.
11. Klapchenko, V. I. (1999). *Percolation quantum relativistic world*. Kyiv: VIPOL, 121.
12. Klapchenko, V. I. (2019). *Relativity and gravity*. Kyiv: KNUBA, 136.
13. Tolpygo, K. B. (1966). *Thermodynamics and Statistical Physics*. Kyiv: Kyiv University Press, 364.
14. Sivukhin, D. V. (1979). *General course of physics. Thermodynamics and molecular physics*. Moscow: Nauka, 552.
15. *Mathematical Encyclopedic Dictionary*. (1988). Ch. ed. Yu.V. Prokhorov. Moscow: Sov. Encyclopedia, 847.
16. Patashinsky, A. Z. & Pokrovsky, V. L. (1982). *Fluctuation theory of phase transitions*. Moscow: Nauka, 382.

Посилання на публікацію

- APA Klapchenko, Vasily, Kuznetsova, Irina & Krasnianskyi, Grygorii. (2023). Fragmented physical statistics and self-ordering processes in complex systems. *Management of Development of Complex Systems*, 53, 80–90, dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2023.53.80-90.
- ДСТУ Клапченко В. І., Кузнецова І. О., Краснянський Г. Ю. Фрагментована фізична статистика та процеси самоупорядкування в складних системах. *Управління розвитком складних систем*. Київ, 2023. № 53. С. 80 – 90, dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2023.53.80-90.