

Кривенко Ольга Петрівна

Кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник НДІ будівельної механіки, <https://orcid.org/0000-0002-1623-9679>

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

Лізунов Петро Петрович

Доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри будівельної механіки,

<https://orcid.org/0000-0003-2924-3025>

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

Ворона Юрій Володимирович

Кандидат технічних наук, доцент, завідувач відділу НДІ будівельної механіки,

<https://orcid.org/0000-0001-8130-7204>

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

Калашніков Олександр Борисович

Здобувач ступеня кандидата технічних наук, кафедра будівельної механіки,

<https://orcid.org/0009-0009-7825-9809>

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОПРУЖНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРІАЛУ В ЗАДАЧАХ СТІЙКОСТІ БАГАТОШАРОВИХ ОБОЛОНОК

***Анотація.** Тонкостінні конструкції, елементами яких є пластини й оболонки з композитних матеріалів, все ширше застосовуються в різних галузях техніки. Зростаючі потреби практики та впровадження нових композитних матеріалів вимагають подальшого удосконалення методів розрахунку оболонкових конструкцій неоднорідної структури. Тому актуальною є проблема розробки адекватного методу аналізу поведінки оболонок, що виготовлені з композитних матеріалів багатошарової структури. Робота присвячена поширенню розробленого скінченно-елементного методу дослідження геометрично нелінійного деформування та стійкості пружних оболонок на задачі дослідження оболонок, матеріали шарів яких є композитами волокнистої структури. Для моделювання термопружних властивостей неоднорідного матеріалу оболонки застосовується метод структурування неоднорідностей матеріалу за товщиною і в плані оболонки за допомогою універсального просторового скінченного елемента. Визначення ефективних характеристик композитного матеріалу реалізується за структурними мікромеханічними параметрами його компонентів на основі відомих методик прогнозування пружних сталей для даної моделі композитного матеріалу. Багатошаровий скінченний елемент, створений в рамках розробленого підходу, призначений для дослідження тонких пружних оболонок як з традиційних, так і з композитних матеріалів. Наведено результати досліджень багатошарової композитної панелі з використанням різних мікромеханічних методик. Достовірність отриманих розв'язків обґрунтована шляхом порівняння з результатами, що одержані за допомогою програмного комплексу NASTRAN. Нова модифікація скінченного елемента, що розроблена, дає можливість достовірно, з прийнятною для інженерних розрахунків точністю, досліджувати напружено-деформований стан і стійкість багатошарових оболонок із волокнистих композитних матеріалів.*

***Ключові слова:** тонка пружна оболонка; неоднорідна структура; просторовий багатошаровий скінченний елемент; односпрямований композитний матеріал; мікромеханічні параметри*

Вступ

Широке використання композитних матеріалів (КМ) або композитів у сучасній аерокосмічній, авіаційній і суднобудівній техніці, ядерній і електротехнічній промисловості, приладобудуванні,

а також у багатьох інших провідних галузях спеціальної техніки обумовлене їх підвищеною питомою міцністю та жорсткістю, здатністю витримувати високі температурні навантаження без значних деформацій. Композитні матеріали характеризуються комплексом властивостей, які

значно відрізняються від властивостей традиційних матеріалів (ТМ). Основною перевагою всіх композитів, як штучно створених матеріалів [1 – 4], є можливість виготовлення їх із наперед заданими властивостями з метою покращення надійності та економічності несучих конструкцій.

Найбільш дослідженими в теорії композитів і найпоширенішими на практиці є КМ з волокнистою структурою [5 – 8]. Конструкції, що виготовлені з КМ даної структури, характеризуються високою несучою спроможністю за вибраними напрямками. Ці матеріали найчастіше використовуються в тонкостінних оболонкових конструкціях [1; 2; 4; 8; 9]. Зростаючі потреби практики і впровадження нових композитних матеріалів вимагають подальшого удосконалення методів розрахунку оболонкових конструкцій неоднорідної структури. Якщо термopружні властивості традиційних матеріалів задаються безпосередньо через відомі технічні сталі, то для композитних матеріалів фізико-механічні характеристики моделюються за різними методиками, що враховують особливості як структури композиту, так і його складових.

Мета статті

Метою роботи є розроблення методики моделювання властивостей композитного матеріалу в скінченно-елементній моделі багат шарової оболонки та поширення розробленого скінченно-елементного методу аналізу поведінки пружних оболонок з традиційних матеріалів [10 – 12] на задачі дослідження оболонок, матеріали шарів яких є волокнистими композитами. Робота є продовженням розробок [13 – 15], в яких наведено основні поняття щодо композитних матеріалів, описано шляхи визначення їхніх ефективних пружних фізико-механічних характеристик.

Постановка задачі

Дослідження поведінки багат шарових оболонок ступінчасто-змінної товщини під дією статичного термосилового навантаження виконується за розробленою скінченно-елементною методикою [10; 11; 16]. Методика аналізу напружено-деформованого стану (НДС), втрати стійкості та коливальних тонких пружних неоднорідних оболонок у процесах навантаження статичними зовнішніми силами та нерівномірним об'ємним нагрівом базується на уніфікованому підході. НДС оболонки на всіх етапах навантаження як у докритичній, так і в закритичній областях розглядається з позицій геометрично нелінійних співвідношень просторової теорії термopружності з урахуванням усіх нелінійних складових, всіх компонентів тензорів деформацій і напружень з використанням апарату тензорного числення [17].

Розглядаються тонкі змінної товщини багат шарові оболонки складної геометричної форми, які можуть бути підкріплені ребрами та накладками, послаблені виїмками й отворами, мати злами серединної поверхні (рис. 1). Обшивка оболонки (тіло оболонки без геометричних особливостей за товщиною) і ребра, що її підкріплюють, можуть складатися з довільної (заданої) кількості шарів m , що поєднані між собою в єдиний пакет. Шари деформуються спільно без проковзування та відриву по поверхнях контактів, де виконується вимога рівності компонент вектора переміщень. Шари матеріалу можуть бути анізотропними та різними. Геометрично тонка оболонка розглядається як тривимірне тіло, що обмежене двома граничними і контурною поверхнями. Розглядається усталений температурний процес, за якого температурне поле T за об'ємом оболонки вважається відомою та незалежною від НДС функцією координат.

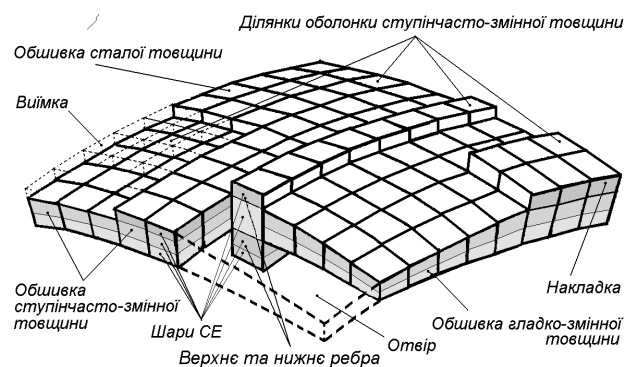


Рисунок 1 – Фрагмент скінченно-елементної моделі багат шарової оболонки змінної товщини

Використовується модель пружного суцільного середовища, що нелінійно деформується, при великих переміщеннях і малих деформаціях, компоненти яких є лінійними функціями напружень. Матеріали шарів оболонки розглядаються як лінійно-пружні, властивості яких відповідають узагальненому закону Дюамеля – Неймана [18].

При отриманні розв'язувальних скінченно-елементних співвідношень у формі методу переміщень використана моментна схема скінченних елементів (МССЕ) [19]. МССЕ поширена на задачі геометрично нелінійного деформування та стійкості тонких багат шарових оболонок ступінчасто-змінної товщини при дії термосилових навантажень [10; 11]. Узгоджені з МССЕ апроксимації переміщень і деформацій гарантують правильне врахування жорстких зміщень скінченних елементів, що підвищує збіжність і точність розв'язків при рідких сітках.

Дослідження процесів нелінійного деформування оболонок базується на загальній лагранжевій постановці варіаційної задачі

у приростах. Процес деформування розглядається як послідовність рівноважних станів оболонки при достатньо малих кроках навантаження. Для побудови траєкторій рівноваги конструкції застосовується комбінація крокового методу продовження розв'язку за параметром із процедурою ітераційного методу Ньютона – Канторовича на кроці навантаження [10; 19 – 21]. Прийнятий підхід дає можливість отримувати на кожному кроці розв'язки, які задовольняють нелінійні розв'язувальні рівняння із заданою точністю. Застосування інкрементального методу дає змогу на кожному кроці статичного термосилового навантаження визначати відповідні модальні характеристики неоднорідної оболонки з урахуванням деформованого та переднапруженого станів [12; 22].

У роботі надається методика врахування в скінченно-елементній моделі оболонки фізико-механічних характеристик багатошарового композитного матеріалу, що армований односпрямованими безперервними волокнами. Властивості волокнистого КМ визначаються через мікромеханічні характеристики його компонентів. Визначення ефективних термopужних характеристик матеріалу реалізується за структурними параметрами його компонентів на основі відомих методик прогнозування пружних сталей для даної моделі композиту. Отже, робота присвячена поширенню наявного методу на задачі дослідження поведінки тонких неоднорідних оболонок, шари яких виконані з композитного матеріалу волокнистої структури.

Моделювання фізико-механічних характеристик матеріалів шарів у скінченно-елементній моделі оболонки

При моделюванні термopужних властивостей неоднорідного матеріалу оболонки застосовується метод структурування неоднорідностей матеріалу за товщиною і планом оболонки за допомогою універсального просторового скінченного елемента (СЕ) [10; 11; 13; 23]. Універсальний скінченний елемент, який використовується для апроксимації різних ділянок неоднорідної оболонки ступінчасто-змінної товщини, у загальному випадку, складається з довільної кількості шарів з різними типами матеріалу. Шари СЕ між собою жорстко поєднані у монолітний пакет без проковзування та відриву.

Структурування неоднорідностей матеріалу оболонки за товщиною виконується в межах СЕ та зводиться до подання матеріалу необхідною кількістю шарів однорідних матеріалів, у загальному випадку анізотропних, з відомими термopужними властивостями. Отже, СЕ характеризується заданим типом пакета матеріалу. Оскільки в методиці універсальний СЕ є єдиним для усіх ділянок

скінченно-елементної моделі оболонки (СЕМО), моделювання неоднорідностей матеріалу прийнято однаковим як для обшивки оболонки, так і для ділянок зі ступінчасто-змінною товщиною. Такий підхід відповідає прийнятому принципу моделювання неоднорідної оболонки з використанням єдиної розрахункової моделі на базі одного універсального просторового СЕ.

Структурування неоднорідностей матеріалу оболонки за планом пов'язане з можливістю використання різних типів пакетів матеріалу при побудові СЕМО. У скінченно-елементній моделі оболонки один тип пакета може бути віднесений як до окремого СЕ, так й до групи елементів. Різні типи пакетів різняться за своїми характеристиками: топологічними (кількість шарів), геометричними (товщини шарів) та фізико-механічними (термopужні сталі, об'ємна вага та інші характеристики матеріалів шарів).

Скінченно-елементна методика [10; 11] спирається на використання в шарах СЕ традиційних матеріалів з найбільш поширеними варіантами симетрії, таких як ізотропні, трансверсально-ізотропні та ортотропні [24; 25]. Розроблена розрахункова СЕМО поширена на моделювання в шарах СЕ односпрямованого волокнистого композитного матеріалу. Для будь-якого КМ термopужні властивості задаються через так звані ефективні фізико-механічні характеристики, що визначаються за мікромеханічними параметрами його компонентів. До параметрів волокнистого КМ належать термopужні характеристики матриці і волокна, їх об'ємний вміст у композиті, розміри та взаємне розташування армуючого тощо [4]. У механіці композитів за розробленими методиками усереднення за об'ємом відповідних мікроскопічних властивостей компонентів композиту визначаються його ефективні (макроскопічні) характеристики. Застосування прийнятого підходу дає змогу розширити можливості універсального просторового СЕ і отримати його нову модифікацію. Звичайно, це вимагає проведення ретельного вивчення можливостей та ефективності нового СЕ, а також підтвердження точності розв'язків, що отримуються на його основі.

Базис ортотропії шару скінченного елемента

Зазвичай термopужні параметри ортотропного (та трансверсально-ізотропного) матеріалу шару СЕ визначаються в системі криволінійних триортонормованих координат x^{α} , напрямки яких збігаються з головними напрямками ортотропії матеріалу. Саме в цій системі координат виконуються фізичні виміри всіх характеристик і задаються залежності деформацій $\varepsilon_{i''j''}$ від

напружень $\sigma^{i''j''}$. Компоненти тензорів пружних сталих $C^{a''b''c''d''}$ та коефіцієнтів термічного розширення $\alpha_{a''b''}$ для цих матеріалів визначаються або через відомі технічні сталі ТМ, або через обчислені ефективні фізико-механічні характеристики КМ, відповідно до відомих співвідношень, які можна знайти, наприклад, в роботах [5; 26; 27].

Односпрямований волокнистий КМ, у якого волокна напрямлені, наприклад, за віссю $x^{2''}$, є варіантом трансверсально-ізотропного матеріалу, коли площина ізотропії проходить через осі $x^{1''}$ та $x^{3''}$. У цьому випадку залежності деформацій від напружень мають вигляд:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1''1''} &= \frac{1}{E} \sigma^{1''1''} - \frac{\nu'}{E'} \sigma^{2''2''} - \frac{\nu}{E} \sigma^{3''3''}, \quad \varepsilon_{2''3''} = \frac{1}{2G'} \sigma^{2''3''}, \\ \varepsilon_{2''2''} &= -\frac{\nu'}{E'} \sigma^{1''1''} + \frac{1}{E'} \sigma^{2''2''} - \frac{\nu}{E} \sigma^{3''3''}, \quad \varepsilon_{1''3''} = \frac{1}{2G} \sigma^{1''3''}, \\ \varepsilon_{3''3''} &= -\frac{\nu}{E} \sigma^{1''1''} - \frac{\nu'}{E'} \sigma^{2''2''} + \frac{1}{E} \sigma^{3''3''}, \quad \varepsilon_{1''2''} = \frac{1}{2G'} \sigma^{1''2''}, \\ \varepsilon_{1''2''} &= \frac{1}{2G} \sigma^{1''2''}. \end{aligned}$$

Тут: E, E' – модулі пружності для розтягу-стиску в площині ізотропії та в напрямку, нормальному до неї (в напрямку волокон); ν, ν' – коефіцієнти Пуассона, які характеризують скорочення в площині ізотропії при розтягу в цій площині та напрямку, нормальному до неї; G, G' – модулі зсуву в площині ізотропії та в площинах, які нормальні до площини ізотропії; $G = E/(2(1+\nu))$; α, α' – коефіцієнти температурного лінійного розширення в площині ізотропії та в напрямку, нормальному до неї.

Компоненти тензора пружних сталих $C^{a''b''c''d''}$ так визначаються через відповідні технічні (або ефективні) сталі трансверсально-ізотропного матеріалу:

$$\begin{aligned} C^{1''1''1''1''} &= C^{3''3''3''3''} = E[1 - e(\nu')^2]/\Delta, \\ C^{2''2''2''2''} &= E'(1 - \nu^2)/\Delta, \\ C^{1''1''3''3''} &= C^{3''3''1''1''} = E[\nu + e(\nu')^2]/\Delta, \\ C^{1''1''2''2''} &= C^{2''2''1''1''} = C^{2''2''3''3''} = C^{3''3''2''2''} = \\ &= E\nu'(1 + \nu)/\Delta, \\ C^{1''3''1''3''} &= C^{3''1''1''3''} = C^{3''1''3''1''} = C^{1''3''3''1''} = G, \\ C^{1''2''1''2''} &= C^{2''1''1''2''} = C^{2''1''2''1''} = C^{1''2''2''1''} = \\ &= C^{2''3''2''3''} = C^{3''2''2''3''} = C^{3''2''3''2''} = C^{2''3''3''2''} = G', \\ \Delta &= (1 + \nu)[1 - \nu - 2e(\nu')^2], e = E/E'. \end{aligned} \quad (1)$$

Модель цього типу матеріалу можна отримати зі загальної моделі ортотропного матеріалу, якщо термопружні сталі задати так:

$$\begin{aligned} E_{1''} &= E_{3''} = E, \quad E_{2''} = E', \\ G_{1''3''} &= \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad G_{1''2''} = G_{2''3''} = G', \\ \nu_{1''3''} &= \nu_{3''1''} = \nu, \quad \nu_{2''1''} = \nu_{2''3''} = \nu', \\ \nu_{1''2''} &= \nu_{3''2''} = \nu'E/E', \\ \alpha_{1''} &= \alpha_{3''} = \alpha, \quad \alpha_{2''} = \alpha'. \end{aligned} \quad (2)$$

Для трансверсально-ізотропного КМ, площина ізотропії якого проходить через осі $x^{1''}$ та $x^{2''}$, відповідно маємо:

$$\begin{aligned} C^{1''1''1''1''} &= C^{2''2''2''2''} = E[1 - e(\nu')^2]/\Delta, \\ C^{3''3''3''3''} &= E'(1 - \nu^2)/\Delta, \\ C^{1''1''2''2''} &= C^{2''2''1''1''} = E[\nu + e(\nu')^2]/\Delta, \\ C^{1''1''3''3''} &= C^{3''3''1''1''} = C^{2''2''3''3''} = C^{3''3''2''2''} = \\ &= E\nu'(1 + \nu)/\Delta, \\ C^{1''2''1''2''} &= C^{2''1''1''2''} = C^{2''1''2''1''} = C^{1''2''2''1''} = G, \\ C^{1''3''1''3''} &= C^{3''1''1''3''} = C^{3''1''3''1''} = C^{1''3''3''1''} = \\ &= C^{2''3''2''3''} = C^{3''2''2''3''} = C^{3''2''3''2''} = C^{2''3''3''2''} = G' \end{aligned} \quad (3)$$

та

$$\begin{aligned} E_{1''} &= E_{2''} = E, \quad E_{3''} = E', \\ G_{1''2''} &= \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad G_{1''3''} = G_{3''2''} = G', \\ \nu_{1''2''} &= \nu_{2''1''} = \nu, \quad \nu_{3''1''} = \nu_{3''2''} = \nu', \\ \nu_{1''3''} &= \nu_{3''2''} = \nu'E/E', \\ \alpha_{1''} &= \alpha_{2''} = \alpha, \quad \alpha_{3''} = \alpha'. \end{aligned} \quad (4)$$

Загалом головні напрямки ортотропії матеріалу (напрямки криволінійних триортонормованих координат $x^{a''}$) не збігаються з напрямками місцевої системи координат скінченного елемента x^i . Вони можуть розміщуватись на серединній поверхні кожного шару СЕ під довільним кутом до місцевих осей. При цьому, в загальному випадку, матеріал не є прямолінійно ортотропним. Проте пологість серединної поверхні та тонкість шару СЕ оболонки дають можливість зробити припущення, що в об'ємі шару матеріал є прямолінійно ортотропним, а його технічні термопружні сталі, які задаються в триортонормованій системі координат $x^{a''}$, є незмінними. Триортонормований базис $\bar{e}_{a''}$ системи координат $x^{a''}$ надалі будемо називати “базисом ортотропії шару скінченного елемента”.

У розрахункових співвідношеннях СЕМО компоненти тензорів пружних сталих C^{ijkl} та коефіцієнтів термічного розширення α_{kl} матеріалу подаються в косокутному базисі місцевої криволінійної системи координат x^i СЕ.

Вони пов'язані з відповідними характеристиками $C^{a''b''c''d''}$, $\alpha_{a''b''}$, які визначені в триортонормованій системі координат $x^{a''}$, формулами перетворення [17]:

$$C^{ijkl} = C_{a''}^i C_{b''}^j C_{c''}^k C_{d''}^l C^{a''b''c''d''}, \quad (5)$$

$$\alpha_{kl} = C_k^{a''} C_l^{b''} \alpha_{a''b''}, \quad (6)$$

де

$$C_{a''}^i = C^{a''} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{a''}}, \quad C_k^{a''} = C_{a''k} = \frac{\partial x^{a''}}{\partial x^k} \quad (7)$$

– компоненти тензорів перетворення координат місцевої і триортонормованої систем координат.

Для знаходження компонент тензорів перетворення (7) спочатку розглянемо одношаровий СЕ. Загалом серединна поверхня скінченного елемента $ABCD$ є положим косим гіпаром (рис. 2). Через тонкість оболонки замінимо цю поверхню на площину, яка проходить через місцеві осі x^2 та x^3 (чотирикутник $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}$).

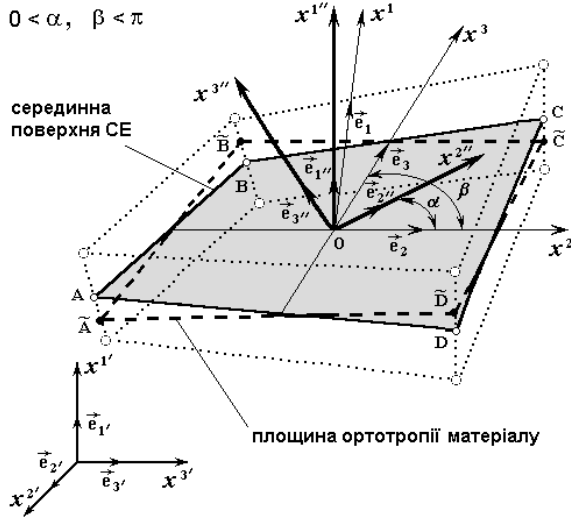


Рисунок 2 – Базис ортотропії шару СЕ

На цій площині $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}$ розмістимо базис ортотропії $\tilde{e}_{a''}$ та його осі $x^{2''}$ та $x^{3''}$ так, щоб головна вісь пружності ортотропного матеріалу $x^{2''}$ була спрямована під довільним кутом α до осі x^2 місцевої системи координат ($0 < \alpha < \pi$). Початки систем координат $x^{a''}$ та x^i збігаються та знаходяться в центрі СЕ (точці O). β – кут між базисними векторами \tilde{e}_2, \tilde{e}_3 місцевої системи координат ($0 < \beta$). Запропонована схема дає можливість розв'язати геометричну задачу щодо визначення компонент тензорів перетворення координат (8) та знаходження, згідно з (6) та (7), компонент тензорів C^{ijkl} , α_{kl} в місцевій системі координат x^i .

Знаходження компонент тензорів перетворення координат $C_{a''}^i$ та $C_k^{a''}$ будемо здійснювати з використанням глобальної декартової системи координат $x^{p'}$, як проміжної, за співвідношеннями

$$C_{a''}^i = C_{p'}^i C_{a''}^{p'}, \quad C_k^{a''} = C_{p'}^{a''} C_k^{p'}, \quad (9)$$

де $C_{a''}^{p'}$, $C_{p'}^{a''}$ – компоненти тензора перетворення координат відповідно глобальної $x^{p'}$ та ортонормованої $x^{a''}$ систем, які пов'язані між собою співвідношенням [17]

$$C_{p'}^{a''} = \frac{A(C_{a''}^{p'})}{\text{Det}(C_{a''}^{p'})},$$

де $\text{Det}(C_{a''}^{p'})$ – визначник матриці перетворення координат; $A(C_{a''}^{p'})$ – алгебраїчне доповнення до елемента $C_{a''}^{p'}$ цієї матриці.

Тоді із залежностей (5), (6) маємо:

$$C^{ijkl} = C_{p'}^i C_{h'}^j C_{r'}^k C_{q'}^l C_{a''}^{p'} C_{b''}^{h'} C_{c''}^{r'} C_{d''}^{q'} C^{a''b''c''d''}, \quad (10)$$

$$\alpha_{kl} = C_k^{p'} C_l^{h'} C_{p'}^{a''} C_{h'}^{a''} \alpha_{(a''a'')}. \quad (11)$$

Щоб скористатися співвідношеннями (10), (11) необхідно невідомі компоненти тензора перетворення $C_{a''}^{p'}$, $C_{p'}^{a''}$ виразити через відомі $C_{p'}^i$, $C_k^{p'}$. Методика знаходження компонентів перетворення $C_{p'}^i$, $C_k^{p'}$ через задані декартові координати вузлів СЕ є стандартною процедурою в алгоритмі методу. Отже, при розв'язанні цієї геометричної задачі розглядаються три системи координат (рис. 2):

1) триортонормована $x^{a''}$ з базисними векторами $\tilde{e}_{a''}$, в якій задаються термпружні сталі $C^{a''b''c''d''}$, $\alpha_{a''a''}$ для ортотропних (трансверсально-ізотропних) матеріалів;

2) фіксована глобальна декартова $x^{p'}$ з базисними векторами $\tilde{e}_{p'}$, у якій задаються координати вузлів СЕ, обчислюються напрямки базисних векторів \tilde{e}_i місцевої системи координат і компоненти тензора перетворення

$$C_{p'}^i = C^{ip'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{p'}}, \quad C_k^{p'} = C_{p'k} = \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^k}. \quad (12)$$

3) місцева x^i з базисними векторами \tilde{e}_i , у якій необхідно визначити компоненти тензорів C^{ijkl} , α_{kl} .

1. Знаходження компонент $C_{p'}^{a''}$. Оскільки базисні вектори \tilde{e}_2, \tilde{e}_3 та \tilde{e}_2, \tilde{e}_3 розміщені в одній

площині, а напрямки векторів $\vec{e}_{1''}$ та \vec{e}^1 , що ортогональні до них, збігаються, маємо

$$\vec{e}_{1''} = \frac{\vec{e}^1}{|\vec{e}^1|} = \frac{C_{p'}^1}{\sqrt{g^{11}}} \vec{e}_{p'}. \quad (13)$$

З іншого боку базисний вектор $\vec{e}_{1''}$ подається в глобальній декартовій системі координат $x^{k'}$ як

$$\vec{e}_{1''} = C_{1''}^{p'} \vec{e}_{p'}. \quad (14)$$

Прирівнюючи (13) та (14), знаходимо

$$C_{1''}^{p'} = \frac{C_{p'}^1}{\sqrt{g^{11}}}.$$

2. Знаходження компонент $C_{2''}^{p'}$. Для цього скористаємося трьома умовами (рис. 2):

- 1) кут між векторами \vec{e}_2 та $\vec{e}_{2''}$ дорівнює α ;
- 2) вектори $\vec{e}_{1''}$ та $\vec{e}_{2''}$ ортогональні;
- 3) кут між векторами \vec{e}_3 та $\vec{e}_{2''}$ дорівнює $(\beta - \alpha)$.

Звідси отримуємо систему трьох лінійних рівнянь щодо трьох шуканих невідомих $C_{2''}^{p'}$:

$$C_{2''}^1 C_{2''}^1 + C_{2''}^2 C_{2''}^2 + C_{2''}^3 C_{2''}^3 = \sqrt{g_{22}} \cos \alpha,$$

$$C_{1''}^1 C_{2''}^1 + C_{1''}^2 C_{2''}^2 + C_{1''}^3 C_{2''}^3 = 0,$$

$$C_{3''}^1 C_{2''}^1 + C_{3''}^2 C_{2''}^2 + C_{3''}^3 C_{2''}^3 = \sqrt{g_{33}} \cos(\beta - \alpha).$$

3. Знаходження компонент $C_{3''}^{p'}$. З умови ортогональності вектора $\vec{e}_{3''}$ до векторів $\vec{e}_{1''}$ та $\vec{e}_{2''}$ маємо

$$\vec{e}_{3''} = \vec{e}_{1''} \times \vec{e}_{2''} = \sqrt{g'} \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_{1'} & \vec{e}_{2'} & \vec{e}_{3'} \\ C_{1''}^1 & C_{1''}^2 & C_{1''}^3 \\ C_{2''}^1 & C_{2''}^2 & C_{2''}^3 \end{vmatrix},$$

де “ \times ” – визначає операцію векторного множення; $\sqrt{g'} = 1$ – визначник метричного тензора декартової системи координат; $\vec{e}_{a''} = C_{a''}^{p'} \vec{e}_{p'}$ – подання векторів базису ортотропії через базисні вектори $\vec{e}_{p'}$ декартової системи координат.

Після низки перетворень остаточно отримуємо:

$$C_{3''}^1 = C_{1''}^2 C_{2''}^3 - C_{2''}^2 C_{1''}^3,$$

$$C_{3''}^2 = C_{2''}^1 C_{1''}^3 - C_{1''}^1 C_{2''}^3,$$

$$C_{3''}^3 = C_{1''}^1 C_{2''}^2 - C_{2''}^1 C_{1''}^2.$$

Через пологість серединної поверхні СЕ тонкої обшивки та ділянок ступінчато-змінної товщини можна зробити звичайні для МСЕ, з геометричної точки зору, спрощення. Вони стосуються осереднення метричних характеристик шарів СЕ. При визначенні термопружних параметрів матеріалів шарів багатшарових пакетів будемо вважати, що компоненти тензорів перетворення координат у (10)

та (11) для всіх шарів є однаковими та приймають значення компонент, що обчислюються у центрі СЕ. Похибки, що при цьому привносяться, як показали чисельні експерименти [10], не перешкоджають розгляданню неоднорідних оболонок складної форми. При згущенні сітки ці похибки швидко зменшуються.

Зауважимо, що при розрахунку багатшарових оболонок важливим є надання можливості задавати довільне розміщення напрямків головних осей пружності ортотропних і трансверсально-ізотропних матеріалів. Прийнятий підхід щодо структурування матеріалу за планом з можливістю використання в кожному СЕ різних типів пакетів матеріалу дає змогу моделювати криволінійну анізотропію матеріалу. Це досягається за рахунок того, що в різних СЕ волокна можуть мати різні напрямки, які при реалізації змінюються від одного СЕ до іншого дискретно. Тобто, в кожному окремому СЕ головні осі ортотропії матеріалу шарів можуть розміщуватись на серединній поверхні кожного шару під довільним кутом до місцевих осей. Отже, дискретно змінюючи орієнтацію напрямків головних осей матеріалів шарів, отримуємо можливість моделювати термопружні характеристики криволінійно ортотропних і трансверсально-ізотропних матеріалів.

Моделювання пружних властивостей композитного матеріалу оболонки

Порівняно з традиційними матеріалами композити мають невелику масу та відповідно менші габарити, тому їх ефективно використовують у тонкостінних оболонкових конструкціях. Переваги та високі фізико-механічні характеристики КМ найповніше реалізуються в орієнтованих матеріалах, що армовані паралельними волокнами. З цих матеріалів створюються багатшарові композити, шари (або моношари) яких складаються з односпрямованого матеріалу. Шари волокнистого композитного матеріалу мають свої напрямки орієнтації волокон (рис. 3).

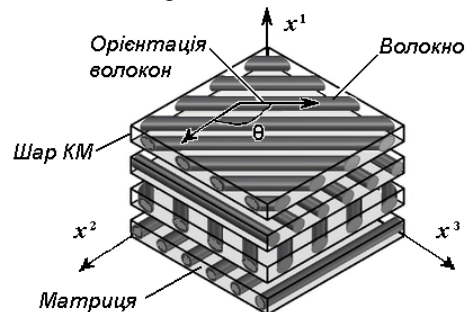


Рисунок 3 – Односпрямований багатшаровий волокнистий КМ

Для волокнистого КМ, який є мікроструктурованим матеріалом, розрізняють компоненти – дві основні фази: армуюче та матриця.

Як армуючий в них використовуються одновимірні компоненти, один з розмірів яких значно перевищує два інших. Ці компоненти називають волокнами, рідше фібрами або наповнювачами. Волокна є доволі тонкими елементами КМ. Наприклад, товщина вуглецевих волокон знаходиться в межах 5 – 10 мкм [26]. Волокна сприймають основні напруження, що виникають в матеріалі при дії зовнішніх навантажень та забезпечують необхідну жорсткість і міцність конструкції з композиту в напрямку орієнтації волокон.

Важливим елементом КМ є матриця. Її ще називають в'язучим чи заповнювачем. Матриця задає форму елементу конструкції; фіксує взаємне розташування армуючих волокон, пов'язуючи в єдине ціле компоненти; розподіляє за об'ємом матеріалу напруження, що виникають, забезпечуючи цим рівномірне навантаження на армуючий матеріал (волокно); загалом забезпечує ефективну спільну роботу волокон за різних видів навантажень. Саме поєднання в КМ жорстких високоміцних волокон і більш піддатливої матриці визначає оптимальне використання матеріалу при його відносно невеликій вазі.

Прикладом односпрямованого волокнистого матеріалу є стандартна вуглецева стрічка FibARM 200/300. Стрічка складається зі сукупності пасм волокон, які в матриці поєднані паралельно між собою. У середньому кількість пасм на 10 см складає 35 штук. Кожне пасмо має приблизно 1000 волокон. На рис. 4 надана мікрофотографія пасма вуглецевих волокон, яка зроблена за допомогою електронного мікроскопу РЕММА-102-02 зі збільшенням у 1200 разів. Діаметр волокна у пасмі складає 7,36 мкм.

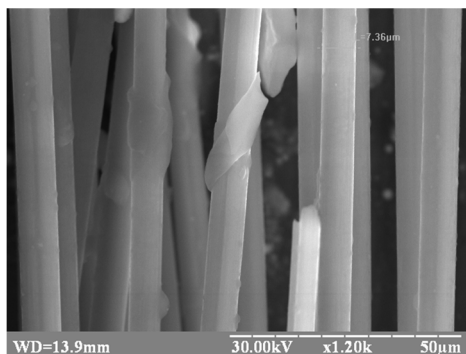


Рисунок 4 – Мікрофотографія вуглецевих волокон

За рахунок регулярної структури великої кількості волокон волокнистий композит, який за своєю суттю та фізичною природою є неоднорідним, можна розглядати як однорідне суцільне середовище, використовуючи метод енергетичного згладжування В. В. Болотіна [26]. Відповідно до цього підходу неоднорідний (гетерогенний) композитний матеріал замінюється еквівалентним однорідним (гомогенним) матеріалом з ефективними

механічними характеристиками, які визначаються шляхом усереднення за об'ємом відповідних мікроскопічних властивостей компонентів композиту. Зазвичай ефективні (макроскопічні) характеристики залежать від форми та розташування волокон та їхнього об'ємного вмісту в матеріалі.

Визначенню термопружних ефективних характеристик КМ присвячено низку робіт, де пропонуються різні підходи та методи прогнозування ефективних характеристик. Життєздатність методів залежить від узгодженості результатів, що отримуються на їхній основі, з експериментальними даними. Питаннями визначення макроскопічних характеристик КМ за заданими мікроскопічними характеристиками компонентів у першу чергу займається механіка композитних матеріалів.

Композитні матеріали, що застосовуються на практиці, зазвичай мають шарувату структуру. Прикладом може бути матеріал, утворений з волокнистого композиту поздовжньо-поперечною укладкою. Властивості багат шарового композиту, структура якого характеризується кількістю шарів, їхньою товщиною та взаємною орієнтацією, в основному визначаються властивостями односпрямованого шару, який називають представницьким елементом об'єму. Це пов'язано з періодичною структурою композитного матеріалу.

У методиках визначення ефективних термопружних характеристик односпрямованого КМ, що ґрунтуються на мікромеханічному підході, використовуються такі основні гіпотези механіки композитів:

- 1) матриця та волокна вважаються жорстко зв'язаними між собою, вони деформуються спільно без проковзування;
- 2) кожний компонент КМ є однорідним лінійно-пружним ізотропним матеріалом;
- 3) виконується гіпотеза щодо регуляризації структури;
- 4) припускається, що напружений стан вздовж орієнтації волокон у кожному представницькому елементі матеріалу є однорідним. Пори, як у волокні, так і на поверхні розділу волокна і матриці, відсутні.

На основі цих припущень, щодо регуляризації структури і однорідного напруженого стану вздовж волокон у представницькому об'ємі, волокнистий односпрямований КМ шару може бути поданий як однорідний трансверсально-ізотропний матеріал з відповідними ефективними термопружними характеристиками (2), (4).

Виходячи з моделі трасверсально-ізотропного тіла, ефективні термопружні сталі представницького шару односпрямованого волокнистого композитного

матеріалу визначаються за такими мікромеханічними параметрами його компонентів (індекс « f » відноситься до волокна (*fiber*), індекс « m » – до матриці (*matrix*)): E_f, E_m – модулі пружності матеріалу волокна та матриці; G_f, G_m – модулі зсуву матеріалу волокна та матриці; ν_f, ν_m – коефіцієнти Пуассона матеріалу волокна та матриці; α_f, α_m – коефіцієнти термічного розширення волокна та матриці; d_f – діаметр волокна; h_0 – товщина армованого шару; $c_f = i_f V_f / V$ – коефіцієнт армування композиту (відносний об'ємний вміст волокон у матеріалі), де V – об'єм представницького шару КМ; V_f – об'єм волокна; S_f – площа перерізу волокна; i_f – частота армування.

Значення об'ємного вмісту волокон у матриці значно впливає на властивості волокнистого композиту і є основним параметром регулювання його характеристик [4]. Збільшення коефіцієнта армування відповідно збільшує жорсткість КМ, але при значенні $c_f \approx 80\%$ властивості волокнистого композиту значно знижуються, утворюються тріщини і розшарування [4] і навпаки, при дуже малих значеннях c_f зростає крихкість волокон і, відповідно, всього композиту. Тому для конструкцій з КМ, які перебувають під дією комбінованих термосилових навантажень, особливо важливим є вибір мікромеханічної моделі пружних сталей.

До найбільш відомих аналітичних мікромеханічних моделей прогнозування ефективних фізико-механічних характеристик односпрямованого КМ належить низка моделей, наприклад [5]:

- модель Е. Рейсса і В. Фойгта («Р-Ф»), яка полягає в усередненні відповідних параметрів компонентів за об'ємом і за орієнтацією;

- модель О. А. Кільчинського, З. Хашіна і Б. Розена («К-Х-Р»), згідно з якою КМ розглядається як волокно у вигляді циліндра, що поміщено в циліндричну оболонку – матрицю, яка своєю чергою знаходиться в необмеженому середовищі з пружними параметрами, що дорівнюють ефективним параметрам композита;

- підхід Д. С. Аболінша («А»), що є модифікацією моделі Кільчинського – Хашіна – Розена;

- модель Г. А. Ваніна («В»), що передбачає використання теорії еліптичних та мероморфних функцій.

Найбільш вживаною є найпростіша модель, що розроблена Рейссом – Фойгтом (*правило суміші*):

$$G' = \frac{\chi_m + c_f + (1 - c_f)g}{(1 - c_f)\chi_m + (1 + c_f)\chi_m g} G_m, \quad (15)$$

$$G = \frac{G_f G_m}{G_m c_f + G_f (1 - c_f)}, \quad \nu' = \nu_f c_f + \nu_m (1 - c_f),$$

де $\chi_f = 3 - 4\nu_f$, $\chi_m = 3 - 4\nu_m$, $g = G_m / G_f$.

Для композитів, що перебувають під дією теплового поля, моделі, які визначають ефективні компоненти тензора теплового розширення, є менш розробленими [28].

Широко розповсюдженим типом армуючого волокнистого КМ є вуглецеві волокна [4 – 6]. Основними перевагами вуглецевих волокон, порівняно з іншими, є їхня жорсткість і теплостійкість, а також малий температурний коефіцієнт лінійного розширення. Широка розповсюдженість і достатня вивченість волокнистих вуглецевих КМ зумовлюють використання цього типу композиту, як прикладу, в наших дослідженнях.

Ефективність розглянутих методик оцінена на прикладі типового волокнистого композита – полімерного вуглепластика, утвореного системою безперервних односпрямованих волокон марки ЛУ-3, що рівномірно розподілені в епоксидній матриці ЭД-20 [5, 15]: $E_m = 3,5$ ГПа, $G_m = 1,325$ ГПа, $\nu_m = 0,32$; $E_f = 250$ ГПа, $G_f = 96,150$ ГПа, $\nu_f = 0,3$.

Зіставлення експериментально визначених ефективних пружних сталей матеріалу (при середньому вмісті волокон $c_f = 0,55$) з результатами, що отримані на підставі мікромеханічних методик, засвідчило, що вони загалом збігаються (таблиця). Поздовжні пружні характеристики, що розраховані різними методами, як правило, характеризуються незначними відхиленнями значень. Для поперечних пружних сталей різниця є більшою. Це дає змогу зробити висновок щодо задовільної, для цього класу матеріалу, відповідності розрахункових і експериментальних даних. При вмісті волокон $c_f = 0,35$ і $c_f = 0,78$ порівняння проведено з даними, що отримані на підставі використання моделі Рейсса – Фойгта (*правило суміші*).

Отже, врахування методик прогнозування пружних сталей розширює можливості методу на дослідження нового класу оболонок, а саме багат шарових оболонок, матеріалом шарів яких є односпрямований волокнистий КМ.

З'являється можливість моделювати матеріал оболонки як традиційним, так і композитним матеріалом шару.

Таблиця

Еф. сталі	c_f	Експ. дані [5]	«Р-Ф»	«К-Ч-Р»	«А»	«В»
E' , ГПа	0.35	–	89,775	89,775 (0%)	89,775 (0%)	89,775 (0%)
	0.55	154,1±7,3	139,08 (9,7%)	139,08 (9,7%)	139,08 (9,7%)	139,08 (9,7%)
	0.78	–	195,77	195,77 (0%)	195,77 (0%)	195,77 (0%)
E , ГПа	0.35	–	5,344	7,324 (37,05%)	5,915 (10,68%)	6,129 (14,69%)
	0.55	9,2±0,2	7,647 (16,8%)	12,103 (31,5%)	8,468 (7,95%)	7,762 (15,3%)
	0.78	–	15,157	26,707 (76,20%)	16,741 (10,45%)	10,149 (-33,0%)
G' , ГПа	0.35	–	2,025	2,695 (33,09%)	2,695 (33,09%)	2,695 (33,09%)
	0.55	4,4±0,3	2,897 (34,1)%	4,377 (0,52%)	4,377 (0,52%)	4,377 (0,52%)
	0.78	–	5,745	9,666 (68,3%)	9,666 (68,3%)	9,666 (68,3%)
G , ГПа	0.35	–	2,417	2,749 (13,74%)	2,025 (-16,22%)	2,417 (0%)
	0.55	–	3,768	4,741 (25,82%)	2,897 (-23,12%)	3,768 (0%)
	0.78	–	8,080	10,851 (34,29%)	5,745 (-28,90%)	8,080 (0%)
ν'	0.35	–	0,313	0,311 (-0,64%)	0,312 (-0,32%)	0,312 (-0,32%)
	0.55	0,310±0,03	0,309 (0,32%)	0,307 (0,97%)	0,307 (0,97%)	0,307 (0,97%)
	0.78	–	0,304	0,303 (-0,33%)	0,303 (-0,33%)	0,303 (-0,33%)

Результати розрахунків

Методики розв'язування геометрично нелінійних задач стійкості оболонок зазвичай зводяться до багаторазового розв'язання лінеаризованих систем рівнянь. При цьому ефективність цих методик значною мірою визначається достовірністю та надійністю лінійного розрахунку оболонок і пластин. Тому вивчення питань збіжності і точності розв'язків лінійних задач є необхідним елементом, що забезпечує адекватність методу. Крім того, вивчення питань збіжності розв'язків у лінійних задачах дає змогу дослідити основні властивості скінченного елемента та методу розрахунку. Ефективність досліджуваних СЕ краще виявляється при розрахунках конструкцій, що є чутливими до урахування жорстких зміщень. До цих об'єктів належать тонкі оболонки, для яких є характерним наявність відносно великих переміщень при малих деформаціях.

Розглянуто тонкі пологі квадратні в плані сферичні панелі, що характеризуються параметром кривизни $K = 24$, де $K = 2a^2/(Rh)$, $h = 1$ см – товщина, $a = 200h$ – розмір у плані, R – радіус серединної поверхні. Оболонки жорстко затиснуті за контуром і навантажені рівномірним нормальним тиском інтенсивністю $q = 1 \text{ кг/см}^2$. Дослідження виконані для одно-, дво- та тришарової оболонки. Шари однакової товщини виготовлено з типового

односпрямованого волокнистого композита – полімерного вуглепластика ЛУ-3/ЭД20, що розглянуто вище (таблиця). За розрахунку в усіх випадках брали скінченно-елементну модель у вигляді чверті оболонки, що має дві площини симетрії, вісь x^1 спрямована за товщиною.

Проаналізовано вплив на НДС композитних оболонок використання чотирьох різних мікромеханічних моделей прогнозування ефективних пружних характеристик матеріалу: (Р-Ф), (К-Х-Р), (А), (В) (таблиця). Розрахунки виконано за МССЕ для трьох значень коефіцієнта армування композита: низька концентрація волокон $c_f = 0,35$; середня $c_f = 0,55$; висока $c_f = 0,78$.

Розв'язки за МССЕ швидко збігаються. Дослідження їхньої збіжності засвідчило практично повний збіг результатів для сіток 4×4 , 8×8 та 12×12 СЕ. За розрахунку взято сітку 8×8 СЕ.

На прикладі мікромеханічної моделі (Р-Ф, правило суміші) виконано порівняльний аналіз результатів розрахунків, що отримані за розробленою методикою на базі МССЕ та за допомогою програмного комплексу (ПК) NASTRAN (рис. 5, 6). Для розв'язування задач в ПК NASTRAN використовувався плоский чотиривузловий багатшаровий СЕ Laminate [29].

Порівняння результатів розрахунку за МССЕ і ПК NASTRAN для форм деформування (рис. 5) та напружень (рис. 6) виконано вздовж середніх діагоналей пластини (вздовж осі x^2 та осі x^3).

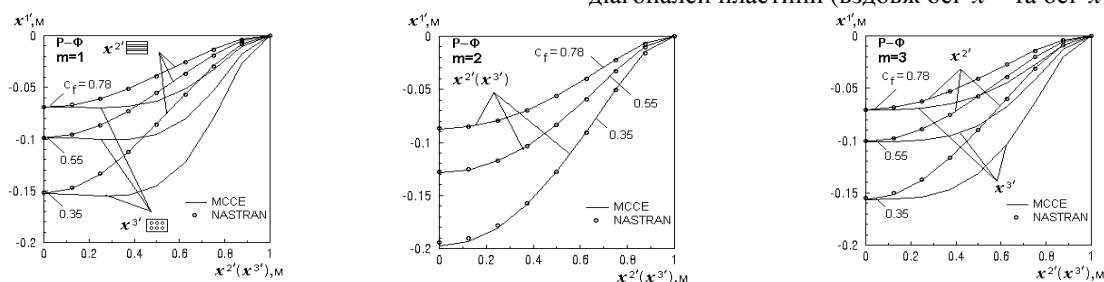


Рисунок 5 – Порівняння форм деформування панелей, які отримані за МССЕ і ПК NASTRAN

Напруження σ^{22} на рисунках приведені в центрі відповідних СЕ. Порівняння розв'язків засвідчило їх повний збіг. Найбільшими є згинальні напруження σ_3^{22} в елементах СЕ, що розташовані вздовж головної діагоналі, напрямленої за віссю $x^{3'}$.

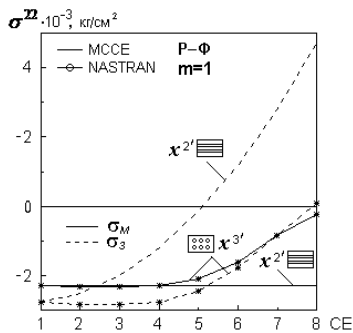


Рисунок 6 – Порівняння напружень, отриманих за MCCE і ПК NASTRAN

Для одношарової панелі, в якій волокна спрямовані вздовж осі $x^{2'}$ (рис. 7, а), використання типу моделі при всіх концентраціях волокон c_f практично не впливає на розв'язки. Незначну розбіжність розв'язків вздовж осі $x^{3'}$ можна пояснити наявністю більшої внутрішньої різниці у визначенні величин поперечних ефективних характеристик (таблиця). Найбільша різниця

розв'язку проявляється для моделі Кільчинського – Хашіна – Розена в середині четвертини панелі.

Для двошарової панелі волокна в шарах направлені перехресно ($0^\circ/90^\circ$): у першому шарі армування реалізоване вздовж осі $x^{2'}$, у другому – вздовж осі $x^{3'}$ (рис. 7, б). Як і очікувалось, оскільки напрямки армування в шарах рівноправні, для кожної моделі деформування за осями $x^{2'}$ та $x^{3'}$ є однаковим.

Модель Кільчинського – Хашіна – Розена для всіх значень c_f характеризує панель як більш жорстку, на відміну від моделі Рейсса – Фойгта. Моделі Аболінша та Ваніна є проміжними. Цей вплив можна пояснити значними відхиленнями величин поперечних ефективних фізико-механічних характеристик, що проявилось при істотній неоднорідності матеріалу за товщиною оболонки.

Для тришарової композитної панелі волокна в шарах направлені перехресно ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$). Використання різних методик прогнозування ефективних характеристик практично не впливає на розв'язки – форми деформування збігаються (рис. 7, в). Як у випадку одношарової оболонки, для моделі Кільчинського – Хашіна – Розена спостерігається незначне відхилення форми деформування в поперечному напрямку від форми, що отримана при використанні інших моделей.

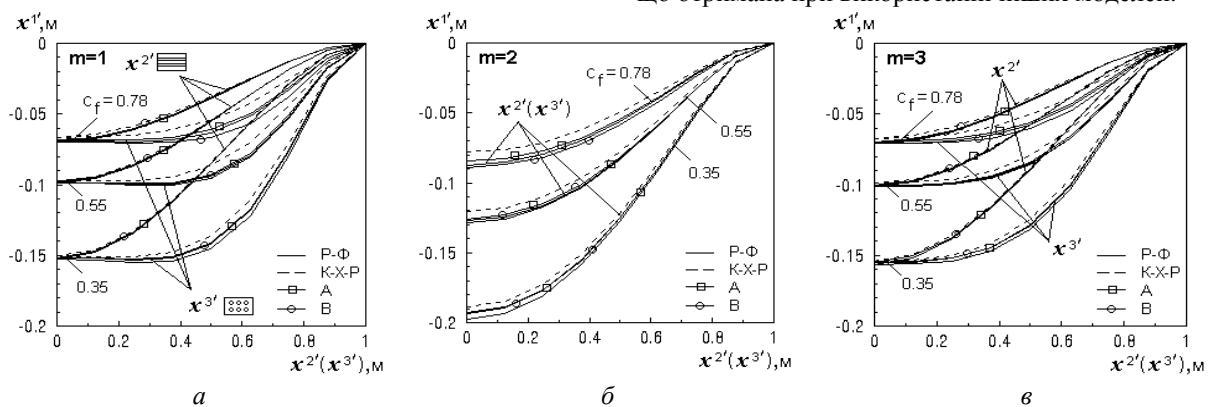


Рисунок 7 – Форми деформування одношарової, двошарової та тришарової панелей для різного вмісту волокон при використанні чотирьох мікромеханічних методик прогнозування пружних сталей

Висновки

Розроблений скінченно-елементний метод аналізу геометрично нелінійного деформування та стійкості пружних неоднорідних оболонок з традиційних матеріалів поширено на задачі дослідження оболонок, матеріали шарів яких є композитами, що мають волокнисту структуру. При побудові скінченно-елементної моделі оболонки для моделювання термопружних властивостей матеріалу застосовано підхід, що базується на структуруванні неоднорідностей матеріалу за товщиною та планом оболонки за допомогою багатшарового

просторового скінченного елемента. Термопружні властивості композитного матеріалу волокнистої структури задаються через ефективні фізико-механічні характеристики, що визначаються за мікромеханічними параметрами його компонентів на основі відомих методик прогнозування пружних сталей. Нова модифікація багатшарового скінченного елемента, що створений в рамках розробленого підходу, спрямована на виконання розрахунків тонких пружних оболонок, виготовлених як з традиційних, так і з композитних матеріалів.

Наведено результати дослідження напружено-деформованого стану багат шарових оболонок з полімерного вуглепластика ЛУ-3/ЭД20 при різних концентраціях волокон. Дослідження засвідчили, що, виходячи із отриманого за різними методиками практично однакового рівня точності для ефективних пружних характеристик КМ, для проведення дослідження НДС тонких композитних оболонок можна користуватися доволі простими виразами моделі Рейсса – Фойгта (правило суміші). Проте розроблений підхід може бути з успіхом

застосованим для оцінки ефективності нових мікромеханічних методів прогнозування ефективних характеристик матеріалу, а також при аналізі поведінки оболонок новостворених волокнистих КМ. Виконано порівняльний аналіз отриманих результатів з даними, що одержані за допомогою програмного комплексу NASTRAN. Одержано повний збіг розв'язків.

Наступним етапом дослідження є вирішення питання про межі застосування розробленої методики.

Список літератури

1. Бондарь В. Г., Бычков С. А., Король В. Н. Решение проблемы создания авиаконструкций из полимерных композиционных материалов на АНТК "Антонов". *Авиационно-космическая техника и технология*: научно-техн. журнал. Харьков: ХАИ, 2003. Вып. 8 (43). С. 5–13.
2. Добриденко О. М., Скляр О. І., Турчин В. М., Белінська Р. Б. Аналіз існуючих композитних матеріалів та оцінка їх застосування у конструкціях планерів літальних апаратів військової авіації України: зб. наук. праць Державного науково-дослідного інституту авіації, 2012. Вип. № 15. С. 147–152.
3. Ванін Г. А., Семенов Н. П., Емельянов Р. Ф. Устойчивость оболочек из армированных материалов. Киев: Наук. думка, 1978. 212 с.
4. Юскаев В. Б. Композиційні матеріали: навчальний посібник. Суми: Вид-во СумДУ. 2006. 199 с.
5. Кучер М. К., Заразовський М. М. Оцінка мікромеханічних моделей прогнозування ефективних констант пружності волокнистих композитів. *Вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут»*. Серія *Машинобудування*. 2010. № 58. С.24 – 29.
6. Углеродные волокна и углекомпози́ты: пер. с англ. / под ред. Э.Фитцера. Москва: Мир. 1988. 336 с.
7. Мэттьюз Ф., Ролингс Р. Композитные материалы. Механика и технология / пер. с англ. Москва: Техносфера. 2004. 407 с.
8. Копань В. С. Композиційні матеріали: навч. посіб. Київ: Пульсари. 2004. 196 с.
9. Нарусберг В. Л., Тетерс Г. А. Устойчивость и оптимизация оболочек из композитов. Рига: Зинатне. 1988. 297 с.
10. Баженов В. А., Кривенко О. П., Соловей М. О. Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. Київ: ЗАТ «Віпол». 2010. 316 с.
11. Кривенко О. П., Лізунов П. П., Ворона Ю. В., Калашніков О. Б. Використання моментної схеми скінченних елементів при дослідженні тонких пружних оболонок неоднорідної структури. *Управління розвитком складних систем*. Київ, 2023. № 53. С. 52 – 62, dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2023.53.52-62.
12. Баженов В. А., Кривенко О. П. Стійкість і коливання пружних неоднорідних оболонок при термосилових навантаженнях. Київ: Каравела. 2020. 187 с.
13. Соловей М. О., Кривенко О. П., Міщенко О. О., Калашніков О. Б. Врахування характеристик композитного матеріалу в скінченноелементній моделі неоднорідної оболонки. *Опір матеріалів і теорія споруд*: наук.-техн. зб. Київ: КНУБА. 2012. Вип. 89. С. 172–180.
14. Соловей М. О., Кривенко О. П., Міщенко О. О. Визначення ефективних фізико-механічних характеристик односпрямованого волокнистого композитного матеріалу. *Опір матеріалів і теорія споруд*: наук.-техн. зб. Київ: КНУБА. 2013. Вип. 92. С. 30–49.
15. Баженов В. А., Кривенко О. П. Застосування методик прогнозування пружних характеристик композитного матеріалу в скінченноелементній моделі оболонки неоднорідної структури. *Опір матеріалів і теорія споруд*: наук.-техн. зб. Київ: КНУБА. 2017. Вип. 98. С. 3–15.
16. Krivenko O. P., Lizunov P. P., Vorona Yu. V., Kalashnikov O. B. A Method for Analysis of Nonlinear Deformation, Buckling, and Vibrations of Thin Elastic Shells of an Inhomogeneous Structure. *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles*. Kyiv: KNUBA. 2023. Issue 110. P. 131–149.
17. Блох В. И. Теория упругости. Харьков: Изд-во ХГУ. 1964. 483 с.
18. Новацкий В. Теория упругости. Москва: Мир. 1975. 872 с.
19. Сахаров А. С., Кислоцкий В. Н., Киричевский В. В. и др. Метод конечных элементов в механике твердых тел. Київ: Вища шк. Голов. изд-во. 1982. 480 с.
20. Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. Москва: Эдиториал УРСС. 1999. 224 с.
21. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. Москва: Мир. 1976. 464 с.
22. Bazhenov V., Krivenko O. Buckling and Natural Vibrations of Thin Elastic Inhomogeneous Shells. Saarbrücken, Deutschland: LAP LAMBERT Academic Publishing. 2018. 97 p.
23. Соловей М. О. Моделирование термopужных властивостей багат шарових матеріалів у задачах стійкості неоднорідних оболонок. *Опір матеріалів і теорія споруд*: наук.-техн. зб. Київ: КНУБА. 2003. Вип. 73. С. 17–30.

24. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Москва: Наука. 1977. 416 с.
25. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. Москва: Наука. 1974. 446 с.
26. Болотин В. В., Новичков Ю. И. Механика многослойных конструкций. Москва: Машиностроение. 1980. 375 с.
27. Композитные материалы: Справочник. Васильев В. В., Протасов В. Д., Болотин В. В. и др.; Под общей ред. В. В. Васильева, Ю. М. Тарнапольского. Москва: Машиностроение. 1990. 512 с.
28. Schapery R. A. Thermal expansion coefficients of composite materials based on energy principles. *J. Compos. Mater.* 1968. Vol. 2. No.3. P. 380.
29. FEMAP. Геометричне та скінченно-елементне моделювання конструкцій у MSC. VisualNastran for Windows: Посібник / Рудаков К.М. Київ: НТУУ "КПІ". 2005. 218 с.

Стаття надійшла до редколегії 27.05.2023

Krivenko Olga P.

PhD (Eng.), Senior Researcher, Leading Researcher of the Research Institute of Structural Mechanics,
<https://orcid.org/0000-0002-1623-9679>

Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

Lizunov Petro

DSc (Eng.), Professor, Head of the Department of Structural Mechanics, <https://orcid.org/0000-0003-2924-3025>

Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

Vorona Yurii

PhD (Eng.), Associate Professor, Head of the Department of the Research Institute of Structural Mechanics,

<https://orcid.org/0000-0001-8130-7204>

Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

Kalashnikov Oleksandr

PhD student of the Department of Structural Mechanics, <https://orcid.org/0009-0009-7825-9809>

Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

MODELING OF THERMO-ELASTIC PROPERTIES OF COMPOSITE MATERIAL IN STABILITY PROBLEMS OF MULTILAYERED SHELLS

Abstract. *Thin-walled structures, the elements of which are plates and shells made of composite materials, are increasingly used in various industries. The growing needs of practice and the introduction of new composite materials require further improvement of the calculation methods of shell structures of inhomogeneous structure. Therefore, the problem of developing an adequate method of analyzing the behavior of shells made of composite materials with a multilayer structure is relevant. The work is devoted to the application of the developed method of finite elements for the analysis of geometrically nonlinear deformation and stability of elastic shells to the problem of the study of shells, the layer materials of which are composites of a fibrous structure. The method of structuring materials through the shell thickness and plan by using a universal 3D finite element is applied to model the thermoelastic properties of a inhomogeneous material. Determination of the effective characteristics of the composite material is realized by the structural micromechanical parameters of its components based on known methods of predicting elastic constants for this model of the composite material. The multilayer finite element, created within the framework of the developed approach, can be exploited to the problems of calculating thin elastic shells from both traditional and composite materials. The results of investigation of a multilayer composite panel using various micromechanical techniques are presented. The results of the study of a multilayer composite panel obtained by various micromechanical methods are given. These results are consistent with those obtained using the NASTRAN software. The new modification of the developed finite element makes it possible to analyze the stress-strain state and stability of multi-layer shells made of fibrous composite materials reliably, with accuracy acceptable for engineering calculations.*

Keywords: *thin elastic shell; inhomogeneous structure; 3D multilayer finite element; unidirectional composite material; micromechanical parameters*

References

1. Bondar, V. G., Bychkov, S. A., Korol, V. N. (2003). Solving the problem of creating aircraft structures from polymer composite materials at the ASTC "Antonov". *Aerospace Engineering and Technology: Scientific and Technical. Magazine. Kharkiv: KhAI*, 8 (43), 5–13. (in Russian).
2. Dobridenko, O. M., Sklyar, O. I., Turchyn, V. M., Belinska, R. B. (2012). Analysis of existing composite materials and assessment of their use in airframe structures of Ukrainian military aviation. *Coll. of science Proceedings of the State Research Institute of Aviation*, 15, 147–152. (in Ukrainian).
3. Vanin, G. A., Semenyuk, N. P., Emelyanov, R. F. (1978). Stability of shells made of reinforced materials. *Kyiv: Nauk. Dumka*, 212. (in Russian).
4. Yuskaev, V. B. (2006). Composite materials: Study guide. *Sumy: Publication of Sumy State University*, 199. (in Ukrainian).

5. Kucher, M. K., Kucher, M. K., Zarazovskyi, M. M. (2010). Evaluation of micromechanical models for predicting effective elastic constants of fibrous composites. *Bulletin of the National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute". Mechanical engineering series*, 58, 24–29. (in Ukrainian).
6. Carbon fibers and carbon composites. (1988). *Translation from English. Ed. E. Fitzer. Moscow: Mir*. 336. (in Russian).
7. Matthews, F., Rawlings, R. (2004). Composite materials. Mechanics and technology / transl. from English. *Moscow: Technosphere*, 407. (in Russian).
8. Kopan, V. S. (2004). Compositional materials: teaching. Manual. *Kyiv: Pulsary*, 196. (in Ukrainian).
9. Narusberg, V. L., Teters, G. A. (1988). Stability and optimization of composite shells. *Riga: Zinatne*, 297. (in Russian).
10. Bazhenov, V. A., Krivenko, O. P., Solovei, N. A. (2010). Nonlinear Deformation and Stability of Elastic Inhomogeneous Structure Shells. *Kyiv: Vipol*, 316. (in Ukrainian).
11. Krivenko, Olga P., Lizunov, Petro, Vorona, Yurii & Kalashnikov, Oleksandr. (2023). Application of the finite element moment scheme to the investigation of thin elastic shells of inhomogeneous structure. *Management of Development of Complex Systems*, 53, 52–62, dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2023.53.52-62. (in Ukrainian).
12. Bazhenov, V. A., Krivenko, O. P. (2020). Buckling and Vibrations of Elastic Inhomogeneous Shells under thermo-mechanical loads. *Kyiv: Karavella*, 187. (in Ukrainian).
13. Solovei, M. O., Krivenko, O. P., Mishchenko, O. O., Kalashnikov, O. B. (2012). Composite material characteristics consideration in a finite elements model of a inhomogeneous shell. *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. Kyiv: KNUBA*, 89, 172-180. (in Ukrainian).
14. Solovei, M. O., Krivenko, O. P., Mishchenko, O. O. (2013). Determination of the effective physicomechanical characteristics of unidirectional fiber composite material. *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. Kyiv: KNUBA*, 92, 30–49. (in Ukrainian).
15. Bazhenov, V. A., Krivenko, O. P. (2017). Application of techniques for predicting elastic properties of the composite material in the finite element model of the shell with inhomogeneous structure. *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. Kyiv: KNUBA*, 98, 3–15. (in Ukrainian).
16. Krivenko, O. P., Lizunov, P. P., Vorona, Yu. V., Kalashnikov, O. B. (2023). A Method for Analysis of Nonlinear Deformation, Buckling, and Vibrations of Thin Elastic Shells of an Inhomogeneous Structure. *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. Kyiv: KNUBA*, 110, 131–149.
17. Bloch, V. I. (1964). Theory of Elasticity. Kharkov: Publishing House of KhSU, 483. (in Russian).
18. Novatsky, V. (1975). Theory of elasticity. *Moscow: Mir*, 872. (in Russian).
19. Sakharov, A. S., et al. (1982). Finite element method in solid mechanics. *Kyiv: Vishcha shkola. Golovn. izd-vo*, 480. (in Russian).
20. Shalashilin, V. I., Kuznetsov, E. B. (1999). The method of continuation of the solution with respect to a parameter and the best parametrization in applied mathematics and mechanics. *Moscow: Editorial URSS*, 224. (in Russian).
21. Oden, J. (1976). Finite elements in non-linear continuum mechanics. *Moscow: Mir*, 464. (in Russian).
22. Bazhenov, V., Krivenko, O. (2018). Buckling and Natural Vibrations of Thin Elastic Inhomogeneous Shells. Saarbruken, Deutschland: LAP LAMBERT Academic Publishing, 97.
23. Solovei, M. O. (2003). Modeling of thermoelastic properties of multilayer materials in problems of stability of inhomogeneous shells. *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. Kyiv: KNUBA*, 73, 17-30. (in Ukrainian).
24. Lekhnitsky, S. G. (1977). Theory of elasticity of an anisotropic body. *Moscow: Nauka*, 416. (in Russian).
25. Ambartsumyan, S. A. (1974). General Theory of Anisotropic Shells. *Moscow: Nauka*, 446. (in Russian).
26. Bolotin, V. V., Novichkov, Yu. I. (1980). Mechanics of multilayer structures. *Moscow: Mashinostroyeniye*, 375. (in Russian).
27. Vasiliev, V. V., Protasov, V. D., Bolotin, V. V. (1990). Composite Materials: A Handbook. Under the general editorship. V. V. Vasilyeva, Yu. M. Tarnapolsky. *Moscow: Mashinostroyeniye*, 512. (in Russian).
28. Schapery, R. A. (1968). Thermal expansion coefficients of composite materials based on energy principles. *J. Compos. Mater.*, 2, 3, 380.
29. Rudakov K.M. (2005). FEMAP. Geometric and finite element modeling of structures in MSC. VisualNastran for Windows: Manual. *Kyiv: NTUU "KPI"*, 218. (in Ukrainian).

Посилання на публікацію

- APA Krivenko, Olga P., Lizunov, Petro, Vorona, Yurii & Kalashnikov, Oleksandr. (2023). Modeling of thermo-elastic properties of composite material in stability problems of multilayered shells. *Management of Development of Complex Systems*, 54, 77–89, dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2023.54.77-89.
- ДСТУ Кривенко О. П., Лізунов П. П., Ворона Ю. В., Калашніков О. Б. Моделювання термопружних властивостей композитного матеріалу в задачах стійкості багат шарових оболонок. *Управління розвитком складних систем*. Київ, 2023. № 54. С. 77 – 89, dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2023.54.77-89.