

**Ботвіновська Світлана Іванівна**

Доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки,  
<https://orcid.org/0000-0002-1832-1342>

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

**Левіна Жаннета Григорівна**

Кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки,  
<https://orcid.org/0000-0002-6868-861X>

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

**Суліменко Ганна Геннадіївна**

Кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інформаційних технологій в архітектурі,  
<https://orcid.org/0000-0002-2454-1675>

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

## ГРАФІЧНИЙ ІНСТРУМЕНТАРІЙ ЩОДО ПОБУДОВИ КВАДРИКИ ОБЕРТАННЯ ЗА ОПИСАНИМ КОНУСОМ

**Анотація.** У роботі представлено дослідження, присвячені задачі комп'ютерного моделювання поверхонь за вписаним або описаним конусом і додатковими конструктивними умовами. Серед конструктивних умов, зокрема, можна виокремити лінію контакту описаного конуса з поверхнею, яка моделюється. У випадку, коли поверхня, яку моделюємо, є поверхнею другого порядку (квадрикою), то лінія контакту теж має бути кривою другого порядку (конікою). Саме така додаткова умова розглядається в пропонованих дослідженнях. Якщо моделюється поверхня обертання, а саме це буде предметом цього дослідження, то площина лінії контакту має бути перпендикулярною, принаймні, до однієї з площин симетрії вписаного конуса. Зрозуміло, що в будь-якому випадку задача зводиться до пошуку меридіана поверхні обертання та пошуку осі цієї поверхні. У роботі показано, що нормаль до конуса, проведена в будь-якій точці контактного перерізу, перетинається з перпендикуляром, проведеним з центра кругового перерізу, якщо (круговий переріз) проведено через цю саме точку контактного перерізу. Прикладною задачею є задача спряження поверхонь другого порядку загального вигляду з поверхнею обертання по плоским кривим другого порядку. Така задача вже розглядалась в одній із робіт авторів, проте вона розв'язувалася засобами 3D-моделювання і реалізовувалась у системі Solid Works. У представленій роботі розглядаються задачі, які можуть виникати при комп'ютерному 2D-моделюванні або ручному моделюванні графічними методами.

**Ключові слова:** графічний інструментарій; лінія контакту; комп'ютерне моделювання; поверхня обертання другого порядку; вписаний (описаний) конус

### Постановка проблеми

Задача комп'ютерного моделювання поверхонь за вписаним (описаним) конусом і додатковими конструктивними умовами має, принаймні, два варіанти застосування.

Перший – це архітектурний дизайн, де суттєвим питанням може бути форма перспективної лінії обрису даної споруди, яка на погляд проєктувальника найкращим чином відповідатиме навколишньому середовищу. Другий – технічний дизайн, де більш цікавою вважається задача спряження поверхонь. Проте обидва варіанти актуальні як для архітектурного, так і технічного

дизайну. У загальному випадку моделювання здебільшого ведеться в програмах 3D-моделювання, оскільки при використанні програмних продуктів 2D-моделювання розкласти алгоритми побудови об'єктів на геометричні операції, що підтримуються тими чи іншими програмними продуктами, складно і не завжди можливо. Але у випадках, коли це можливо такий підхід є плідним, бо забезпечує роботу проєктувальника у звичному режимі, полегшує урахування метричних характеристик та надає додаткові можливості для аналізу задачі, бо значна кількість геометричних властивостей об'єктів у 3D-просторі є узагальненням їх двовимірного аналогу.

## Аналіз останніх досліджень і публікацій

Одним з напрямів моделювання поверхонь другого порядку, як загального, так і поверхонь обертання, є включення описаного (вписаного) конуса до складу їх визначників. Такий підхід у рамках комп'ютерного моделювання поданий у монографії [1, с. 198 – 212]. Він передбачає моделювання поверхонь за умови, що в робочому вікні програми задається лінія обрисів поверхні, а точка зору сприймається як вершина вписаного (описаного) конуса. Прикладом таких підходів можуть бути поверхні обертання загального вигляду [2]. Моделювання (формування) поверхонь обертання за їхніми лініями обрисів передбачає завдання площини симетрії вписаного (описаного) конуса, осі поверхні, що моделюється і належить цій площині симетрії. Показано, що в цьому випадку визначається, незалежно від форми лінії обрисів, одна поверхня обертання. Так, у роботі [2] описано як просторовий, так і проєкційний алгоритм розв'язання задачі, який полягає в такому. Обирається поточна твірна конуса, й за допомогою спільної точки цієї твірної і лінії обрисів отримується дотична площина. Точки лінії контакту поверхні обертання з конусом знаходяться як такі, що належать визначеній дотичній площині, перпендикулярній до неї площині, яка проходить через вісь шуканої поверхні, та самій поточній твірній. Такі підходи плідні, коли розв'язуються задачі моделювання поверхонь.

Кількість вписаних (описаних) конусів може бути необмежена одним конусом. Наприклад, у роботі [3] детально подано методику моделювання на екрані комп'ютера поверхні 2-го порядку за двома конусами. Всі описані вище підходи використовуються при моделюванні будь-яких поверхонь з використанням вписаного (описаного) конуса.

У представленій роботі наводяться й аналізуються варіанти спряження двох поверхонь 2-го порядку по заданій плоскій кривій. У загальному випадку при спільному дотичному конусі може бути визначена  $\infty^2$  поверхонь, які мають задану спільну лінію контакту. Але є варіанти, коли заданій лінії контакту належить тільки одна поверхня бажаного вигляду. Таким прикладом може слугувати [4] побудова гіперболічного параболоїду по заданій гіперболі, яка є лінією контакту з описаним конусом. Ще одним прикладом є моделювання поверхонь обертання 2-го порядку по заданій лінії контакту. У роботі [5] проаналізовано цю задачу, розроблено відповідні алгоритми, які передбачають застосування системи 3D-моделювання Solid Works. Також показано, що для того щоб знайти вісь поверхні

обертання по заданій лінії контакту, необхідно на лінії контакту вибрати дві довільні точки, з яких провести перпендикуляри до площини симетрії конуса, до якої перпендикулярна й площина, в якій лежить лінія контакту. Задачу реалізовано в системі Solid Works – це потужна система, і завдання лінії контакту та осі обертання для побудови всієї поверхні обертання є зовсім простим кроком. Якщо ж задача розв'язується у менш потужних системах, зокрема системах 2D-графіки або у ручному виконанні, необхідно знайти ще форму меридіана й довжину осі поверхні обертання. Саме таким шляхом пропонується розв'язувати задачу нижче.

У задачах спряження поверхонь на перший план виступає не вісь обертання, а переріз, заданий на конусі. Метою ж розв'язання задач є знаходження осі поверхні обертання, яка дотикається цього конуса по заданому перерізу. Такий підхід розглянуто в роботі [5]. У цій роботі показано, що якщо задано переріз, перпендикулярний одній з площин симетрії, наприклад такий, що проєціюється відрізком  $AB$ , то вісь поверхні обертання, інцидентна заданій кривій, знаходиться як пряма, що з'єднає основи двох перпендикулярів, проведених з двох довільних точок перерізу. Але зрозуміло, що цими точками не можуть бути точки  $A$  та  $B$ , оскільки вони лежать у тій площині, до якої треба провести перпендикуляр. Тому маємо вибирати інші точки для побудов перпендикулярів. Перпендикуляри, проведені в точках контакту до дотичних площин – це є однопараметрична множина центрів сфер, які дотичні як до поверхні обертання, так і до описаного (вписаного) конуса. Через кожну точку поверхні обертання проходить сфера, центр якої належить осі обертання шуканої поверхні. Кожна з цих сфер буде дотичною і до поверхні конуса в двох симетричних точках кривої контакту. За цими двома точками побудована вісь поверхні обертання і сама поверхня уцілому. У роботі [5], крім осі обертання, було знайдено і меридіан поверхні обертання. Меридіан визначається вибраними точками на кривій контакту, твірними конуса, що проходять через цю точку і центром. Центр буде спільним і для меридіана, і для шуканої поверхні. Він знаходиться як точка перетину прямої  $SE$  (де  $E$  – центр кривої лінії контакту) і побудованої осі. У роботі [5] задача розв'язувалася в режимі 3D-моделювання в програмному комплексі SolidWorks. Але в розпорядженні дизайнера-проектувальника не завжди є програма тільки 3D-моделювання, або просто дизайнер-проектувальник не володіє необхідними знаннями та навичками для користування нею. Тому автори представленого дослідження вважають, що актуальною є розробка алгоритмів розв'язання цих задач у проєкціях, тобто моделювання методами нарисної геометрії, якими володіють дизайнери

фахової освіти. По-друге, можливість проектування на проєкціях (у 2D-просторі) полегшує задачу проектування за заданими метричними та позиційними характеристиками. Слід зазначити, що при розв'язанні практичних задач моделювання складних геометричних форм з використанням кривих ліній та поверхонь засобами прикладної геометрії традиційно використовують конструктивні методи [6]. На сьогодні в сучасних роботах науковці часто повертаються до конструктивного методу аналізу та синтезу алгоритмів. Це обумовлено появою систем комп'ютерного моделювання, які значно поширили інструментарій реалізації досліджень. Так, у [7] автором запропоновано і реалізовано конструктивний метод побудови квадрики за дев'ятьма точками.

### Мета статті

Мета статті – розробити комплекс графічних алгоритмів (графічний інструментарій) побудови поверхонь обертання вписаних (описаних) в заданий конус за заданою контактною кривою в 2D-просторі для подальшого використання цього інструментарію дизайнерами та архітекторами.

### Виклад основного матеріалу

Все раніше зазначене полягає в тому, що заданий переріз заданого конуса однозначно визначає поверхню обертання другого порядку за умови існування площини симетрії перерізу і площини симетрії конуса. Переріз, перпендикулярний одній з площин симетрії конуса другого порядку, однозначно визначає єдину поверхню обертання другого порядку, яка вписана в конус і проходить через заданий переріз.

На площині у 2D задача знаходження осі поверхні обертання [5], яка доторкається конуса по заданій лінії і є вписаною в задану поверхню, розв'язується майже так просто, як і в 3D. Більш того, є можливість використовувати точки, які належать контурним твірним конуса. Але спочатку візьмемо яку-небудь точку на проєкції контактної кривої ( $k$ ). І використаємо, на наш погляд, раціональний спосіб побудови перпендикуляра. Такий перпендикуляр є перпендикуляром до двох кривих, які проходять через цю точку. Одна з цих кривих може бути прямою, а інша може бути довільною кривою, проведеною через задану точку. Пропонується в якості однієї з кривих використовувати коло, оскільки:

- 1) дотичну до кола простіше побудувати ніж до еліпса;
- 2) за допомогою кругових перерізів суттєво спрощується розв'язок і інших задач.

**Етап 1.** Знаходження осі поверхні обертання, вписаної в конус, з використанням двох проєкцій.

Нехай конус задано вершиною  $S$  та круговим перерізом (рис. 1). Виберемо на ній деяку точку  $l$ .

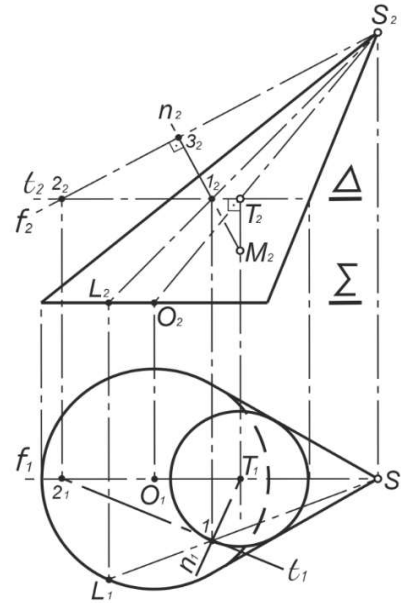


Рисунок 1 – Проєкційна схема знаходження осі поверхні обертання, вписаної в конус

Покажемо, що вісь вписаної в конус поверхні обертання, яка доторкається до його твірних, може бути побудована за допомогою двох контурних точок похилого перерізу. При цьому кожна з двох точок, що визначають вісь, буде належати перпендикуляру до контуру та перпендикуляру з центра кругового перерізу конуса, проведеного через ці точки на контурі. Така побудова вимагає визначення положення кругових перерізів разом з віссю. Але оскільки з точок контуру перпендикуляр до дотичних площин належить тій площині, з якою він має перетинатись, то така побудова не є очевидною і має бути пояснена.

**Пояснення.** Не втрачаючи загалу, розміщуємо конус так, щоб, принаймні, один з кругових перерізів зайняв горизонтальне положення (в площині  $\Sigma$ ) (рис. 1). Для визначення дотичної площини в будь-якій точці конуса, яка може належати й контактній кривій  $k$ , наприклад в точці  $l$ , можна вибрати круговий переріз, який проходить через цю точку. Дотична площина в точці  $l$  конуса визначається дотичною  $t$  до деякої кривої (в нашому випадку до кругового перерізу) в цій точці та твірною конуса  $SL$  ( $\{t_1; SL\}$ ).

Перпендикуляр ( $n$ ) до конуса в точці  $l$  (а саме, до дотичної площини в цій точці) буде направлений в центр кола точку  $T$  на горизонтальній проєкції (пряма  $n_1$ ) і перпендикулярно фронталі площини  $\{t_1; SL\}$  на фронтальній проєкції. Проєкцію фронталі на фронтальній площині (пряма  $n_2$ ) знаходимо в перетині площини симетрії конуса з проєкцією дотичної  $t_2$ .

Із точки  $I$  проводимо перпендикуляр ( $n_2$ ) до фронталі. Одна із точок шуканої осі поверхні обертання (точка  $M$ ) буде лежати на перетині цього перпендикуляра і перпендикуляра до дотичної площини, який проходить через центр кругового перерізу (точку  $T$ ) в площині  $\Delta$ .

Для проведення осі поверхні обертання, вписаної в конус, необхідно побудувати ще одну точку ( $N$ ) за цим саме алгоритмом. Слід зазначити, що всі кругові перерізи на конусі будуть паралельними.

Центр поверхні обертання, вписаної в конус, має належати осі цієї поверхні і прямій, що з'єднує вершину конуса із серединою хорди  $AB$  (точкою  $E$ ). Якщо робота виконується в потужній системі 3D-графіки, то цього достатньо, щоб побудувати меридіан, осі та саму поверхню обертання. Але у системах 2D-графіки такої можливості немає.

На рис. 2 за загальновідомим алгоритмом спроектовано схему побудови осі поверхні обертання, вписаної в конус, заданий параметрами  $\alpha$  (більший кут) та  $\beta$  (менший кут), які є кутами при вершині конуса.

Для спрощення розв'язання задачі кругові перерізи вибираємо такими, що проходять через кінці хорди точки  $A$  і  $B$ . Вісь поверхні обертання проходить через знайдені точки  $M$  і  $N$ , і перетинаючись з віссю конуса, яка проходить через середину хорди  $AB$ , дає змогу визначити центр поверхні обертання – точку  $F$ .

**Етап 2.** Спрощена схема побудови множини кругових перерізів на конусі другого порядку. Такий конус може бут заданий двома кутами  $\alpha$  і  $\beta$  ( $\alpha > \beta$ ), між твірними в площинах симетрії. Нагадаємо, що на конусі маємо два сімейства кругових перерізів, так само, як і на будь-якій

поверхні другого порядку, крім гіперболічного параболоїда [7].

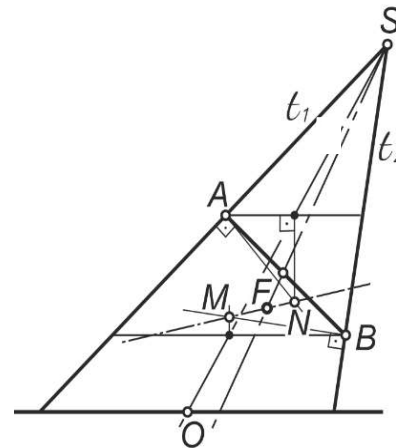


Рисунок 2 – Компактна проєкційна схема знаходження осі поверхні обертання, вписаної в конус

На рис. 3, а показано 3D-зображення кругових перерізів конічної поверхні другого порядку, як перерізу конуса з довільною сферою, яка має центр (точку  $F$ ) на осі конуса та дотична до твірних, у площині, що відповідає куту  $\alpha$ . Схема на рис. 3, б демонструє розв'язок задачі на одному 2D зображенні, яке є суміщенням в одній площині обох площин симетрії конуса зі спільною віссю. У цьому разі достатньо провести одне коло з центром на осі конуса ( $i$ ), та дотичне до твірних, що відповідають більшому з кутів ( $\alpha$ ). Перетин цього кола з твірними, що відповідають меншому з кутів ( $\beta$ ) дасть точки, що визначають напрямок кругових перерізів  $1-2$  та  $1'-2'$ . Середини цих відрізків (точки  $3$  і  $3'$ ) у поєднанні з вершиною конуса ( $S$ ) визначають осі кругових перерізів.

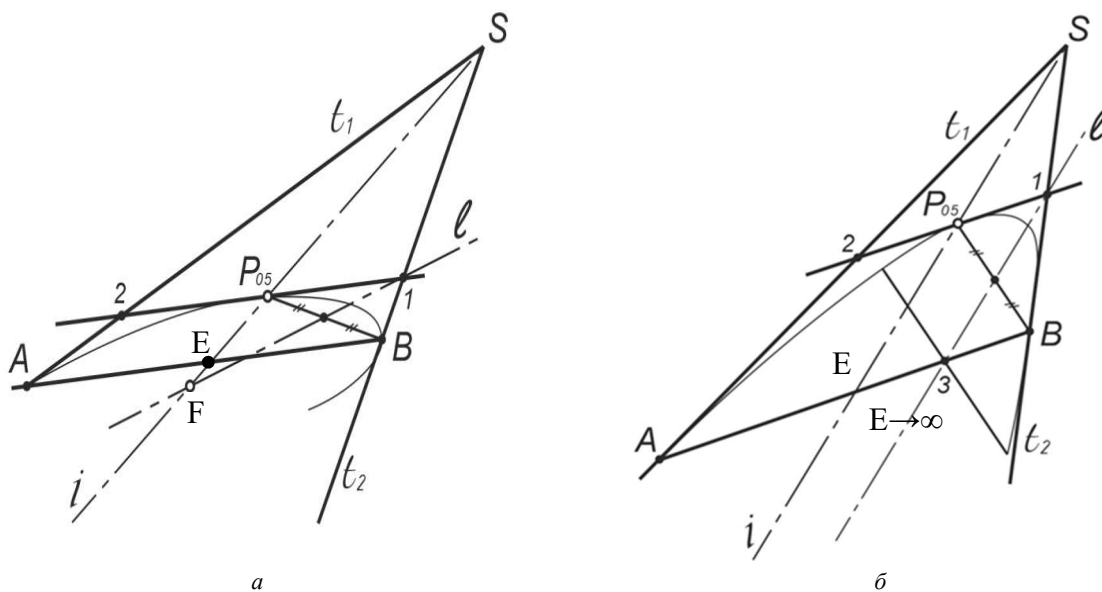


Рисунок 3 – Схема побудови (точки  $F$ ) центра поверхні обертання, вписаної в конус другого порядку

Отже, маємо однопараметричну множину кругових перерізів на конусі другого порядку, яка складається із двох сімейств кіл. Винятком є: поверхня сфери ( $\infty^3$  кругових перерізів); поверхня обертання, яка складається з одного сімейства; поверхня гіперболічного параболоїда, яка не несе жодного сімейства [6, с. 78–97].

**Етап 3.** Знаходження меридіана поверхні обертання, вписаної в конус другого порядку.

Розглянемо (рис. 3) задачу і виконаємо параметризацію до неї: як за двома заданими дотичними та по двох точках дотику, що задані на цих дотичних (умова проходження прямої через точку – два параметри), та по заданому (відомому) центру поверхні обертання (точка  $F$ ), який можна знайти за алгоритмом (рис. 2) на прямій  $SF$  (умова належності точки заданій прямій – один параметр). Тобто, розглянемо задачу, як витративши п'ять параметрів, визначити меридіан, що належить площині  $\Delta'$ , на якій розміщено твірні конуса, що перетинаються під кутом  $\beta$ .

Найбільш характерною точкою для завдання кривих ліній (меридіанів поверхні обертання) буде не центр поверхні обертання – точка  $F$ , а точка ( $P_{0,5}$ ) на прямій  $SF$ . Сама пряма  $SF$  проходить через центр хорди  $AB$ , точку  $E$  (рис. 3, а). Саме ця точка визначає форму дрібно-раціональної кривої другого порядку у формі Без'є, а саме: еліпс (рис. 3, а), якщо

$$f = \frac{EP_{0,5}}{P_{0,5}S} < 0,5; \text{ параболу (рис. 3, б), якщо}$$

$$f = \frac{EP_{0,5}}{P_{0,5}S} = 0,5; \text{ гіперболу, якщо } f = \frac{EP_{0,5}}{P_{0,5}S} > 0,5.$$

Положення цієї точки  $P_{0,5}$  визначає коефіцієнт, який характеризує цю криву і дорівнює  $f$ .

Якщо задано точку  $P_{0,5}$ , то центр поверхні обертання, вписаної в поверхню конуса, знайти

досить легко (рис. 3). Центр кривої другого порядку належить прямій, яка з'єднає полюс  $S$  із серединою поляри  $E$ . Для його визначення потрібно дві такі прямі. На рис. 3, а, б для знаходження точки  $F$  використовується ще один полюс – точка  $L$  і центр відповідної поляри  $P_{0,5}B$ .

Для роботи запропонованого вище алгоритму, п'ятим параметром, який допомагає будувати меридіан, виступає не точка  $P_{0,5}$ , а центр поверхні, точка  $F$ . Задача ж знаходження точки  $P_{0,5}$ , на існування якої орієнтуються поширені алгоритми побудови конік, розв'язується дещо складніше.

Відомо, що пряма, яка проходить через полюс  $S$ , середину поляри  $E$  перетинає криву  $k$  другого порядку в точках  $L$  та  $L'$ , які знаходяться з точками  $E$  та  $S$  в гармонічному співвідношенні:

$$L'ESF = \frac{L'S}{SE} : \frac{L'F}{FE} = -1, \quad (1)$$

і утворюють інволюцію. У цьому рівнянні невідомими є дві точки  $L$  та  $L'$ . Якщо ж нам відома точка  $F$  – яка є центром кривої, то залишається тільки одна невідома точка, а друга, наприклад,  $L'$  може бути виражена через точки  $L$  та  $F$  (рис. 4, а). Такий підхід приводить до появи рівняння другого порядку. Оскільки ця робота зорієнтована на графічне виконання, то й запропонуємо графічний алгоритм розв'язання цієї задачі.

Бачимо, що чотири  $L'ESF$  точки можуть бути спільними для множини кривих другого порядку, які проходять через деяку точку  $L$  і мають центр в точці  $F$ . Оскільки точки  $L$  та  $F$  можуть бути визначені одна через одну за допомогою гармонічного співвідношення (1), то ми маємо лише три параметри. Два інші параметри визначаються кутом нахилу поляри  $AB$  до прямої  $SF$  та довжиною рівних відрізків  $AE=EB$  (рис. 4, б). Тобто, множина визначених кривих буде двопараметричною.

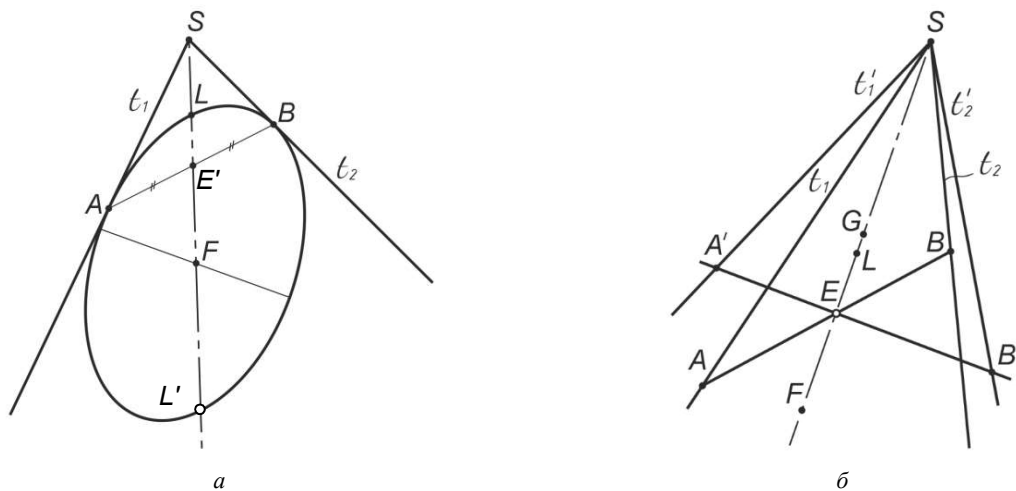


Рисунок 4 – Схема побудови (точки  $F$ ) центра поверхні обертання, вписаної в конус другого порядку

Визначивши точку  $L$  за допомогою будь-якої кривої, можемо стверджувати, що через неї пройдуть всі криві побудованого двопараметричного пучка. За допоміжну криву із пучка можемо взяти коло і побудувати для нього поляру, назовемо її  $A'B'$ . Для цього достатньо, щоб відрізки  $A'E'$  та  $B'E'$  були перпендикулярними до  $SF$ . Тобто на  $SF$  будемо коло, як на діаметрі. Точки  $A'$  і  $B'$  визначаємо на допоміжному колі за допомогою прямої, яка проходить через точку  $E$  ( $E \in AB$ ,  $AE = EB$ ) перпендикулярно прямій. Точка  $L$  буде належати шуканому колу, радіус якого  $R = AF = BF$ . Саме це коло й визначить точку  $L$  – спільну для всіх кривих пучка (рис. 5).

Нижче представимо алгоритм знаходження точки  $L$  меридіана поверхні обертання, вписаної в конус  $S$  по заданому перерізу  $AB$ , і такої, що має точку  $F$  за центр. Точка знаходиться на 2D зображенні.

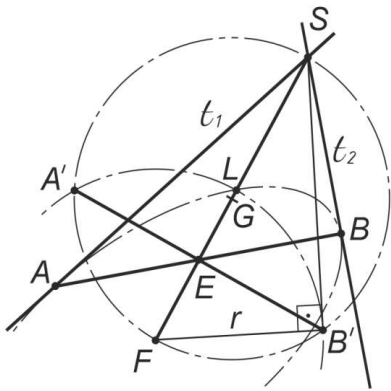


Рисунок 5 – Схема знаходження (точки  $L$ ) меридіана поверхні обертання, вписаної в конус другого порядку

**Алгоритм** (рис. 6). Взявши полюс  $S$ , середину поляри  $E$  та центр кривої  $F$  на одній прямій, маємо два вільних параметри для завдання коніки. У точці  $S$  перетинаються дотичні до кривої  $t_1$  та  $t_2$ . Як було пояснено вище, точки  $L$  та  $F$  будуть спільними для всіх кривих, які задовольняють задані умови. Таких кривих буде двопараметрична множина, яка визначається кутом нахилу хорди  $AB$ , що проходить через точку  $E$ , і слід враховувати умову рівності довжин відрізків  $AE = EB = l_i$ . Знаходимо середину  $SF$  (точку  $G$ ), після чого будемо допоміжне коло радіусом  $r$ . Обираємо допоміжну хорду  $A'B'$ , яку проводимо перпендикулярно  $SF$  в точці  $E$ . Тоді  $\angle FB'S = 90^\circ$ . Радіусом  $FB$  на осі  $SF$  знаходимо точку  $L$ , яка задовольняє всім означеним вище умовам. Саме через цю точку  $L$  пройдуть всі криві заданого двопараметричного пучка конік. Цей алгоритм може бути застосовано для будь-якої хорди, але для його виконання має бути відомою точка  $F$ .

Знайшовши точку  $L$ , через яку будуть проходити всі криві, для яких точка  $S$  – вершина конуса,  $F$  – центр кривої, залишиться лише знайти розмір осей меридіана за цим саме алгоритмом.

Слід зазначити, що для 2D комп'ютерного моделювання достатньо знати вісь і точку на меридіані, а для ручної побудови необхідно знати ще й довжину осі поверхні обертання (меридіана) [10, с. 94–137].

У попередній задачі було визначено поверхню обертання, вписану в обгортаючий конус, за її точкою на меридіані і двома точками, які належать дотичним. Розвинені графічні системи реалізують для побудови меридіана та поверхні обертання будь-який повний набір умов. Але, якщо користувач-дизайнер працює з більш простими 2D-системами або розв'язує задачу власноруч, йому потрібно привести завдання, яке він отримує, або до більш звичної форми, а саме завдання осей з їх розмірами, або знаходження положення точок кривої на прямій, що проходить через середину хорди. Ця точка займає особливе положення, бо саме вона є основою геометричного алгоритму в методі інженерного дискримінанту, і як було сказано вище, визначатиме параметр форми при завданні кривої другого порядку як дрібно-раціональної кривої у формі Безьє. Нижче наведено алгоритм графічного розв'язання задачі знаходження довжини осей меридіана. Звичайно не коректно претендувати на будь-яку новизну в цій галузі, але автори дослідження наводять алгоритм та його обґрунтування, оскільки не знайшли для посилання прикладу розв'язання цієї задачі графічними методами.

**Етап 4.** Нехай криву другого порядку задано дотичними  $SA, SB$  з точками дотику  $A$  та  $B$  і центром  $F$ . Необхідно визначити точку  $M$  на осі кривої (рис. 6). Положення осей вважаємо визначеним на попередньому етапі.

Точку  $L$ , через яку буде проходити двопараметричний пучок кривих другого порядку, знаходимо в разі потреби визначення форми меридіана за алгоритмом етапу 3. На рис. 6 за тим самим алгоритмом знайдені довжини напівосей меридіана і, водночас, поверхні обертання, якщо визначено напрямок цієї осі ( $\ell$ ) поверхні обертання (за алгоритмом першого етапу).

Зафіксуємо перетин осі  $\ell$  з дотичною  $t_2$  в точці 2. Ця точка буде точкою перетину дотичних до меридіана в точці  $B$  та симетричній їй відносно меридіана точці 7. Точка 6 – середина цього відрізка. Знаходимо середину відрізка  $2-F$  і будемо коло радіусом  $GB$ . Положення точки 3 знаходимо на цьому колі в перетині з хордою  $B7$ . Радіусом  $r = F3$  фіксуємо точку  $M$  на осі  $2-F$ , яка визначає довжину напівосі.

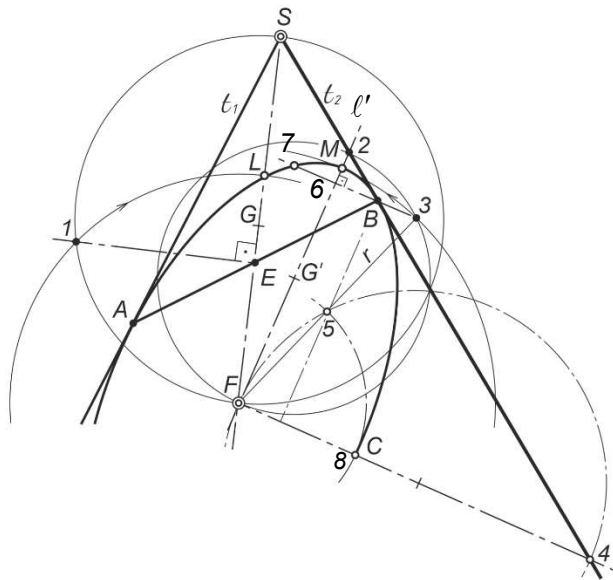


Рисунок 6 – Схема знаходження довжини осей меридіана поверхні обертання, вписаної в конус другого порядку при 2D-модельованні

Вище було зазначено, що для коніки потрібно знати крім довжини великої осі ще й довжину малої осі. Для цього з точки  $F$  проводимо під прямим кутом до  $2-F$  малу вісь і продовжуємо одну з дотичних,

наприклад  $t_2$ , до перетину з нею, знаходимо точку 4. Через центр коніки  $F$  та точку 4 проводимо дугу кола з центром на лінії  $4-F$ , яка на хорді  $8-B$  і визначає положення точки 5.

Із точки  $F$  радіусом  $R = F5$  проводимо дугу, яка фіксує положення точки  $C$  на осі  $4-F$  і таким чином знаходимо довжину малої напівосі коніки (відрізок  $CF$ ).

## Висновки

Запропоновано графічний інструментарій, який уможливило в 2D-просторі розв'язувати просторові задачі побудови поверхні обертання за заданим вписаним або описаним конусом. Отже, представлено задачу знаходження меридіана і осі поверхні обертання, включаючи довжину цієї осі. Задача має важливе застосування при спряженні поверхонь другого порядку. Зокрема показано, що при заданому контактному перерізі і заданому конусі може бути побудована тільки одна поверхня обертання. Проте вона може бути спряжена з однопараметричною множиною поверхонь загального вигляду.

## Список літератури

1. Геометрическое моделирование и машинная графика в САПР : учебник / В. Е. Михайленко, В. Н. Кислюкий, А. А. Ляшенко и др. Киев : Вища шк., 1991. 374 с. ISBN 5-11-001950-9.
2. Суліменко С. Ю. Аналіз та синтез процесу комп'ютерного моделювання поверхонь обертання за їх лініями обрису. *Проблеми інформаційних технологій ХНТУ*, (22). 2017. С. 200–206. ISSN 2313-0687.
3. Anpilogova V., Botvinovska S., Zolotova A., Sulimenko H., Study of the problem on constructing quadrics at the assigned tangent cones / *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. Engineering technological systems*. Vol 5, No 1 (101) (2019). 39-48. doi.org/10.15587/1729-4061.2019.180859.
4. Botvinovska S., Zolotova A., Mostovenko A., Sulimenko H. Construction of Hyperbolic Paraboloids According to a Prospective Outline in the Form of Hyperbola, Vol.26 (2022), No. 2, 207–216. <https://www.heldermann.de/JGG/JGG26/jgg26.htm>.
5. Ботвіновська С. І., Васько С. М., Суліменко Г. Г. Особливості комп'ютерного моделювання об'єктів архітектури та дизайну, до складу яких входять поверхні обертання другого порядку. *Управління розвитком складних систем*. Київ: КНУБА, 2019. № 40. С. 102–111. <http://urss.knuba.edu.ua/files/zbirnyk-40/15.pdf>.
6. Михайленко В. Е., Обухова В. С., Подгорный А. С. Формообразование оболочек в архитектуре. Киев: Будівельник, 1972. 207 с.
7. Korotkiy, V. A. Construction of a Nine-Point Quadric Surface/ V.A. Korotkiy. *Journal for Geometry and Graphics*. Copyright Heldermann Verlag. Vol. 22 (2018), Issue. 2.P. 183–193.
8. Монж, Г. Начертательная геометрия. Классики науки. Москва: Книга по требованию, 2013. 292 с.
9. Кованцов, М. І. Проективна геометрія. Київ : Вища школа; видання 2-е, перераб. и доп., 1985. 368 с.
10. Кривошапко С. Н., Иванов В. Н. Энциклопедия аналитических поверхностей. Москва. Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2015. 560 с. ISBN 978-5-397-04608-4.

Стаття надійшла до редколегії 02.09.2023

### Botvynovska Svitlana

DSc (Eng), Professor, Head of Department of descriptive geometry and engineering drawing,  
<https://orcid.org/0000-0002-1832-1342>  
 Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

### Levina Zhanetta

PhD, Associate Professor of Department of descriptive geometry and engineering drawing,  
<https://orcid.org/0000-0002-6868-861X>  
 Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

**Sulimenko Hanna**

PhD, Associate Professor of Department of IT in architecture,

<https://orcid.org/0000-0002-2454-1675>

Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

**GRAPHIC TOOLKIT FOR CONSTRUCTING A QUADRICS  
OF ROTATION ACCORDING TO THE CONE DESCRIBED**

**Abstract.** The work presents research on the tasks of computer modeling of surfaces by the inscribed or described cone and additional structural conditions. Among the structural conditions, in particular, can be distinguished the contact line of the described cone with the surface that is modeled. In the case when the surface that model is the surface of the second order (quadrica), the contact line should also be a second order curve (conica). It is this additional condition that is considered in these studies. In this work is showed an algorithm for modeling the rotation surface. We want to pay attention to such a moment that the plane in which the contact line is located must be perpendicular to at least one of the two planes of the inscribed (described) cone. It is clear that in any case, the task is to find the meridian of the surface of rotation and the search for the axis of this surface. The work shows that the normal to the cone, drawn anywhere in the contact line, intersects with a perpendicular, which is made from out from the center of the circular section, if the circular section is drawn through the same contact section. The considered geometric task will be the basis of the applied task, when it is necessary to modeling the surface by conjugating the surface of the second order of the general type and surface of the rotation. Connecting of the surfaces will take place along a flat second-order curves. This task has already been considered in one of the works of the authors, but it was solved by means of 3D modeling and was implemented in the Solid Works system. The presented work deals with tasks that can occur with 2D computer modeling or manual modeling by graphic methods. A graphical toolkit is proposed, which allows solving spatial problems of constructing a surface of rotation for a given inscribed or described cone in 2D space. Namely, the task of finding the meridian and axis of the surface of rotation, including the length of this axis, is presented. The problem has an important application in the conjugation of second-order surfaces. In particular, it is shown that for a given contact section and a given cone, only one surface of rotation can be constructed. However, it can be conjugated with a one-parameter set of surfaces of general appearance.

**Keywords:** graphic tools; contact line; computer modeling; second order rotation surface; inscribed (described) cone

**References**

1. Mykhaylenko, V. E., Kislooky, V. N., Lyashchenko, A. A. and others. (1991). Geometric modeling and machine graphics in CAD: textbook. Kyiv: Higher School, 374. ISBN 5-11-001950-9. [in Russian].
2. Sulimenko, S. Yu. (2017). Analysis and synthesis of the process of computer modeling of surfaces of rotation along their contour lines. *Problems of information technologies*, 22, 200–206. ISSN 2313-0687. URL: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/Pit\\_2017\\_2\\_21](http://nbuv.gov.ua/UJRN/Pit_2017_2_21). [in Ukrainian].
3. Anpilogova, V., Botvinovska, S., Zolotova, A., Sulimenko, H. (2019). Study of the problem on constructing quadrics at the assigned tangent cones. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 5, 1 (101), 39-48. doi.org/10.15587/1729-4061.2019.180859.
4. Botvinovska, S., Zolotova, A., Mostovenko, A., Sulimenko, H. (2022). Construction of Hyperbolic Paraboloids According to a Prospective Outline in the Form of Hyperbola, 26, 2, 207–216. <https://www.heldermann.de/JGG/JGG26/jgg26.htm>.
5. Botvinovska, S., Vasco, S. & Sulimenko, H. (2019). Features of computer modeling of objects architecture and design, which include surfaces of rotation of second order. *Management of Development of Complex Systems*, 40, 102–111; dx.doi.org/10.6084/m9.figshare.11969049. [in Ukrainian].
6. Mikhailenko, V. E., Obukhova, V. S., and Podgorny, A. S. (1972). Formation of Shells in Architecture. Kyiv : «Builder», 207. [in Ukrainian].
7. Korotkiy, V. A. (2018). Construction of a Nine-Point Quadric Surface. *Journal for Geometry and Graphics*, 22, 2, 183–193.
8. Monge, G. (2013). Descriptive geometry. Classics of science. Moscow: Book on demand, 292.
9. Kovantsov, M. I. (1985). Projective geometry. Kyiv: Higher School, second edition revised and supplemented, 368.
10. Krivoshapko, S., Ivanov, V. (2015) Encyclopedia of Analytic Surfaces. Moscow, 560. ISBN 978-5-397-04608-4.

**Посилання на публікацію**

- APA Botvinovska, S., Levina, Zh. & Sulimenko, H. (2023). Graphic Toolkit for Constructing a quadrics of rotation according to the cone described. *Management of Development of Complex Systems*, 55, 109–116, dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2023.55.109-116.
- ДСТУ Ботвіновська, С. І, Левіна, Ж. Г., Суліменко, Г. Г. Графічний інструментарій щодо побудови квадрики обертання за описаним конусом. *Управління розвитком складних систем*. Київ, 2023. № 54. С. 109 – 116, dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2023.55.109-116.