

Недін Валентин Олегович

Кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри будівельної механіки,

<https://orcid.org/0000-0003-3138-2892>

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

**МОДОВЕ ЗБУДЖЕННЯ ЗГІНАЛЬНИХ КОЛИВАНЬ СТЕРЖНЯ, ЩО
ОБЕРТАЄТЬСЯ ПРИ ПОЗДОВЖНЬОМУ ВІБРОУДАРНОМУ НАВАНТАЖЕННІ**

Анотація. У роботі наведено результати дослідження динамічної поведінки моделі робочого органу вібробурильної установки під час буріння свердловин у твердих породах ґрунту під дією поздовжнього віброударного навантаження. Метою є виявлення діапазонів частот збудження коливань вищого порядку. Процес буріння свердловин у твердих породах ґрунту суттєво полегшується під впливом вібраційних навантажень. Руйнування породи під час вібраційно-обертального буріння відбувається через спільну дію віброударних імпульсів та обертального руху. Коливання в такому разі можуть здійснюватися зі зростанням просторової гармоніки, при цьому відбувається підвищення моди власних коливань. Через це цікавим стає питання вивчення динамічної поведінки досліджуваної системи з метою виявлення частот віброударного впливу, за яких відбувається модове збудження згинальних коливань зі зростанням числа напівхвиль. Для пошуку таких діапазонів частот дії поздовжнього ударного навантаження на стержень, що здійснює коливальний рух під час обертання, дослідження проведено з використанням розробленого програмного забезпечення. У ньому реалізовано методіку комп'ютерного моделювання коливального руху стержнів значної довжини, що обертаються, під дією поздовжніх періодичних навантажень. Таке програмне забезпечення дає змогу моделювати коливальний рух стержнів під час обертання, а також визначати параметри, за яких відбувається зростання модового числа поперечних коливань змодельованої системи. За допомогою зазначеного програмного забезпечення побудовано діаграми, що відображають діапазони ударних частот, за яких відбувається модове збудження зі збільшенням числа напівхвиль пружної лінії стержня, яким моделюється робочий орган вібробурильної установки, за різних параметрів системи. Зазначено, що зі збільшенням швидкості обертання стержнів діапазон ударних частот розширюється. Процес коливального руху розглянуто в просторі з урахуванням інерційних навантажень та геометричної нелінійності стержня. Здійснено аналіз отриманих результатів та зроблено висновок про можливість експлуатації обладнання в певних діапазонах частот.

Ключові слова: геометрична нелінійність; інерційні навантаження; поздовжні ударні навантаження; вібробуріння; модове збудження; форми вигину

Постановка проблеми

Задачі динаміки стержнів, що обертаються та перебувають під дією поздовжніх періодичних ударних навантажень, виникають під час проектування конструкцій робочих органів вібробурильних машин. Коливальний рух таких стержнів у просторі під час обертання описується складними системами диференціальних рівнянь із частковими похідними з урахуванням інерційних навантажень, які обумовлюються переносними, відносними та коріолісовими прискореннями. Експлуатація зазначеного обладнання здійснюється зі зміною довжини стержня (глибини занурення робочого органу), що впливає на зміну значень

критичних швидкостей обертання, які, своєю чергою, залежать також від моди коливань.

Під час здійснення коливального руху обертальних стержнів, що перебувають під дією зовнішніх періодичних ударних навантажень, можливий різний характер коливань залежно від фізичних, геометричних та динамічних параметрів. Коливання можуть відбуватися зі зростанням просторової гармоніки, при цьому відбувається підвищення моди власних коливань.

Через це цікавим є питання вивчення динамічної поведінки досліджуваної системи з метою виявлення частот віброударного впливу, за яких відбувається модове збудження згинальних коливань зі зростанням числа напівхвиль.

Аналіз основних досліджень і публікацій

За останні роки задачі динаміки коливань стержнів, що обертаються, досліджені в роботах багатьох авторів.

У роботі [1] наведено результати чисельних досліджень динамічної поведінки віброударної системи, яка є сильно нелінійною негладкою розривною динамічною системою. Надано результати спостережень багатьох цікавих явищ, зокрема таких, які є унікальними для негладких систем. Знайдено зони стійкого та нестійкого рухів із застосуванням методу продовження розв'язку за параметром та аналізу мультиплікаторів Флоке. Виконано порівняльний аналіз методів моделювання удару у віброударних системах із твердим (жорстким) та м'яким ударом.

Вплив періодичних ударних навантажень на конструктивні елементи бурильної установки під час поздовжніх коливань досліджується в роботі [8].

У роботі [10] у нелінійній постановці розглядається задача динаміки бури бурової установки з урахуванням поздовжньої періодичної сили ударної дії. Дослідження виконані з метою вивчення вібрацій, що виникають у з'єднувальній муфті.

Результати дослідження коливального руху стержня, що моделює роботу бурильної колони під час обертання, після виведення його зі стану рівноваги наведено в роботі [7]. Зазначено, що дія зосередженої на нижньому кінці вагомому стержня сили стискання призводить до збільшення амплітуди вигину стержня в його нижній частині, внаслідок чого починає відбуватися закручування стержня.

У роботі [6] наведено результати дослідження впливу віброударних навантажень на стійкість стержня робочого органа віробурового агрегату під час буріння свердловин у твердих породах ґрунту.

Аналіз наявних у науковій літературі результатів показує, що в задачах вивчення динаміки стержнів, що обертаються під дією поздовжнього періодичного навантаження ударного характеру, не приділено достатньої уваги виявленню діапазонів частот збудження коливань зі зміною гармоніки.

Мета статті

Мета статті – представити отримані результати чисельного дослідження впливу поздовжнього віброударного навантаження на динамічну поведінку моделі віробуру та діапазонів частот збудження коливань вищого порядку, які отримані з використанням розробленого автором програмного забезпечення для дослідження коливань стержнів, що обертаються [4; 5].

Виклад основного матеріалу

Постановка задачі

Як динамічна модель розглядається стержень довжиною l (рис. 1), на який діє періодичне поздовжнє ударне навантаження $P(t)$. Стержень перебуває під дією розподіленого навантаження – сили власної ваги q та обертається з кутовою швидкістю ω навколо прямолінійної осі O_1X_1 нерухомої системи координат $O_1X_1Y_1Z_1$. Зі стержнем пов'язана рухома система координат $OXYZ$. Коливальний рух стержня в системі координат $OXYZ$ характеризується переміщеннями $y(x, t)$ та $z(x, t)$ точок, що належать до його осі, у напрямку координатних осей OY та OZ відповідно.

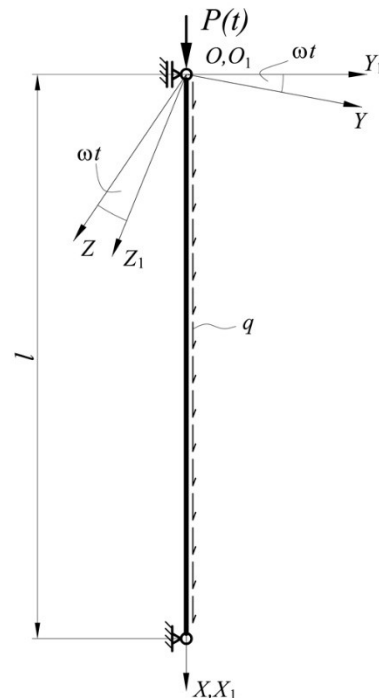


Рисунок 1 – Динамічна модель системи

Математична модель коливального руху стержня, у рухомій системі координат $OXYZ$, що обертається разом із ним, описується рівняннями:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{EI_1(x)}{\rho_1} \right) - \bar{m} r^2 \left(\frac{d^4 y}{dt^2 dx^2} + \omega^2 \frac{d^2 y}{dx^2} \right) - 2\omega \bar{m} \frac{dz}{dt} - \\ - \bar{m} \omega^2 y + \bar{m} \frac{d^2 y}{dt^2} + P(t) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{dx} \left(\bar{m} g(l-x) \frac{dy}{dx} \right) = 0, \\ \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{EI_2(x)}{\rho_2} \right) - \bar{m} r^2 \left(\frac{d^4 z}{dt^2 dx^2} + \omega^2 \frac{d^2 z}{dx^2} \right) + 2\omega \bar{m} \frac{dy}{dt} - \\ - \bar{m} \omega^2 z + \bar{m} \frac{d^2 z}{dt^2} + P(t) \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{dx} \left(\bar{m} g(l-x) \frac{dz}{dx} \right) = 0, \end{cases}$$

де E – модуль пружності матеріалу стержня; $I_{1(x)}$, $I_{2(x)}$ – моменти інерції перетину стержня у взаємно перпендикулярних площинах; r – радіус інерції перерізу стержня; $\bar{m}$ – маса одиниці довжини стержня; $1/\rho_1$, $1/\rho_2$ – головні кривини осі стержня.

Дія поздовжнього віброударного навантаження моделюється функцією $P(t)=P_{\max}(a^{1+\cos\theta t}-a^2)$, де θ – частота дії ударного навантаження, t – час роботи обладнання, a – сталий коефіцієнт, який характеризує швидкість зростання величини ударної сили від 0 до $P_{\max}$ [4].

Методика дослідження

Для дослідження динаміки об'єктів, що розглядаються, використовується методика чисельного диференціювання, описана в роботах [4; 5], та метод чисельного інтегрування за часом Хубболта [9] у вигляді:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_n^{t+\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t^2} [2y_n^{t+\Delta t} - 5y_n^t + 4y_n^{t-\Delta t} - y_n^{t-2\Delta t}], \\ \dot{y}_n^{t+\Delta t} &= \frac{1}{6\Delta t} [11y_n^{t+\Delta t} - 18y_n^t + 9y_n^{t-\Delta t} - 2y_n^{t-2\Delta t}], \\ \ddot{z}_n^{t+\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t^2} [2z_n^{t+\Delta t} - 5z_n^t + 4z_n^{t-\Delta t} - z_n^{t-2\Delta t}], \\ \dot{z}_n^{t+\Delta t} &= \frac{1}{6\Delta t} [11z_n^{t+\Delta t} - 18z_n^t + 9z_n^{t-\Delta t} - 2z_n^{t-2\Delta t}]. \end{aligned}$$

Згідно з зазначеною методикою моделювання поперечних коливань стержня під час обертання здійснюється на основі багатократного (циклічного) розв'язку системи рівнянь коливального руху для кожної точки пружної лінії осі стержня з метою пошуку нових координат положення цих точок у кожний наступний момент часу $t+\Delta t$ (рис. 2).

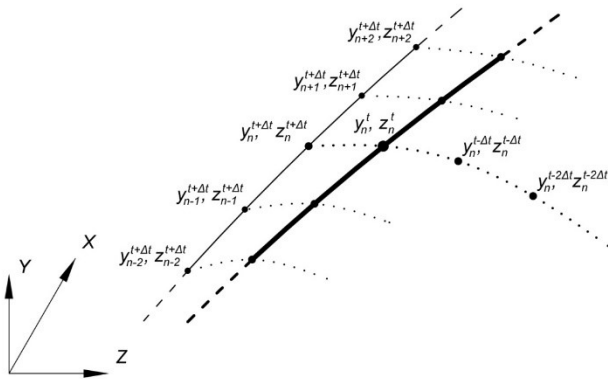


Рисунок 2 – Траєкторія руху стержня

Реалізація методики здійснена за допомогою розробленої комп'ютерної програми з графічним інтерфейсом. Вона дозволяє моделювати коливальний рух стержнів під час обертання, досліджувати динаміку змодельованої системи шляхом обчислення та побудови поточних форм вигину стержнів, здійснювати аналіз динамічної поведінки досліджуваної системи, а також визначати параметри, за яких відбувається зростання модового числа поперечних коливань змодельованої системи.

Результати

У цій роботі здійснено дослідження динаміки бурильного пристрою під дією поздовжнього віброударного навантаження. Розглянуто роботу робочого органу в діапазонах швидкості обертання бурового снаряда ω до 8 с^{-1} , з частотою дії ударного навантаження в діапазоні $\theta=100\dots150 \text{ с}^{-1}$. Стержень трубчастий, із зовнішнім діаметром $d=146 \text{ мм}$, товщиною стінки $s=8 \text{ мм}$.

На рис. 3 показано залежності частот власних коливань λ від довжини стержня l для гармонік коливань n від 1 до 10.

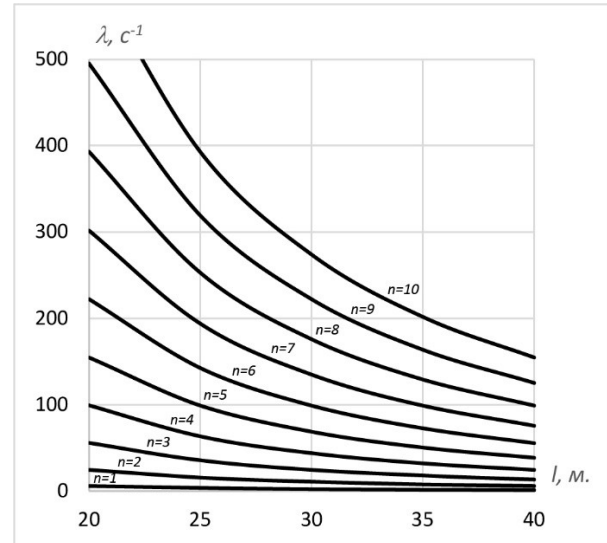


Рисунок 3 – Залежність частот власних коливань стержня від його довжини

Зі збільшенням моди коливань стержня певної довжини значення частоти власних коливань відповідно збільшуються, що, своєю чергою, впливає на його стійкість.

На рис. 4 для стержнів, що не обертаються ($\omega=0$), відображено діапазони ударних частот θ , за яких відбувається формування згинальних форм зі збільшенням числа напівхвиль (модове збудження) залежно від довжини l .

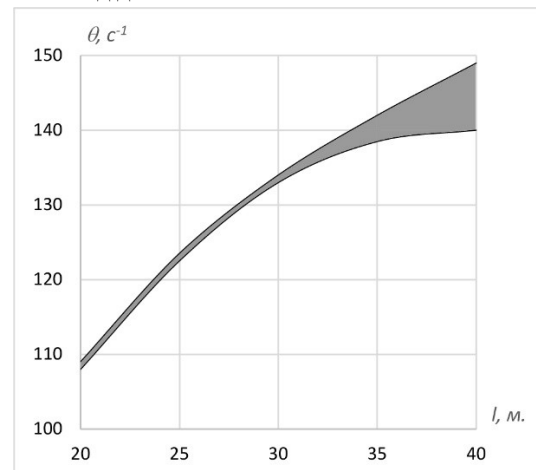


Рисунок 4 – Діапазони ударних частот збудження хвиль θ залежно від довжини стержня

Графік показує, що для стержнів меншої довжини діапазон частот ударного впливу θ , за яких відбувається перехід системи на вищі гармоніки коливань (сіра область), значно менший, ніж для стержнів більшої довжини, але за межами діапазону (біла область) зміна моди під час коливального руху не відбувається. Зі збільшенням довжини стержня діапазон ударних частот, за яких відбувається модове збудження коливань, суттєво розширюється.

На рис. 5 – 8 відображено діапазони ударних частот θ , за яких відбувається модове збудження зі збільшенням числа напівхвиль, залежно від швидкості обертання ω для стержнів довжиною 20м (рис. 5), 25 м (рис. 6), 30 м (рис. 7), 35 м (рис. 8).

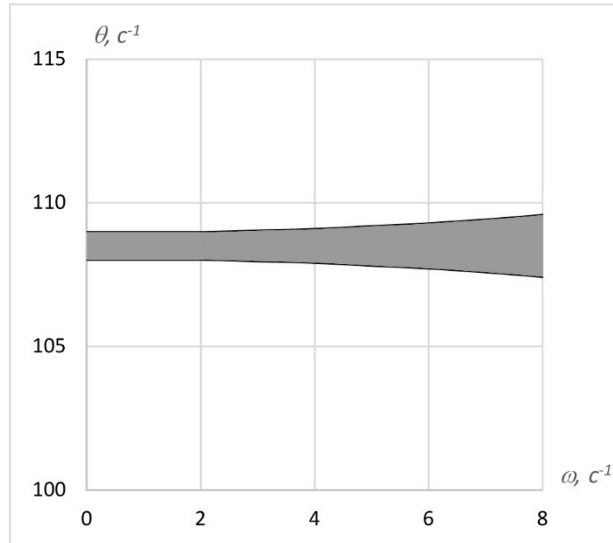


Рисунок 5 – Діапазони ударних частот збудження хвиль θ залежно від швидкості обертання ω для стержнів довжиною $l=20\text{м}$

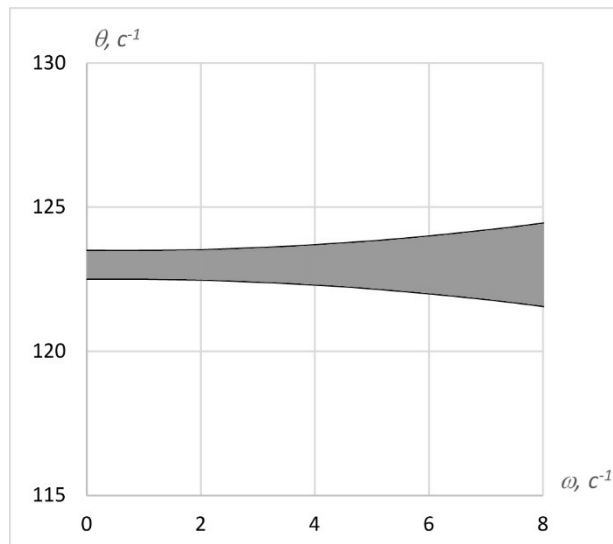


Рисунок 6 – Діапазони ударних частот збудження хвиль θ залежно від швидкості обертання ω для стержнів довжиною $l=25\text{м}$

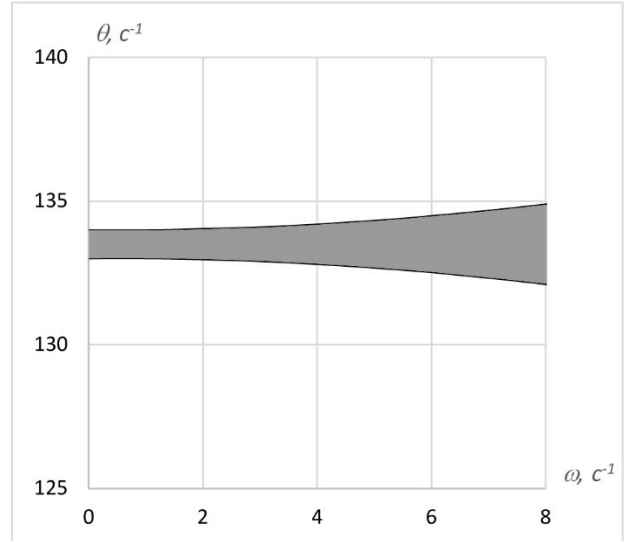


Рисунок 7 – Діапазони ударних частот збудження хвиль θ залежно від швидкості обертання ω для стержнів довжиною $l=30\text{м}$.

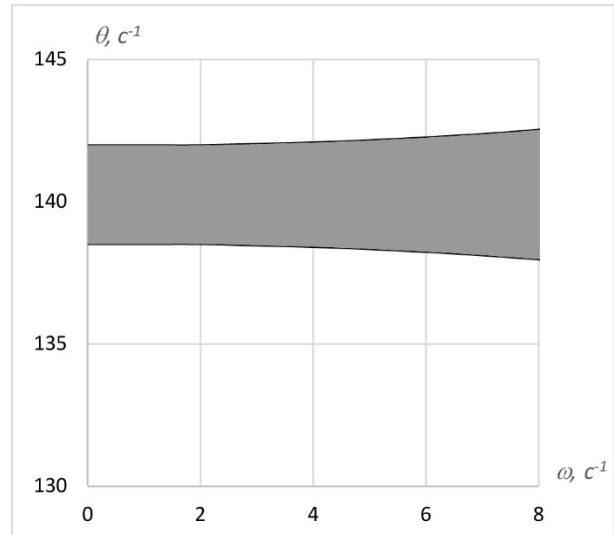


Рисунок 8 – Діапазони ударних частот збудження хвиль θ залежно від швидкості обертання ω для стержнів довжиною $l=35\text{м}$.

Графіки показують, що зі збільшенням швидкості обертання стержня ω діапазон частот θ повільно розширюється. За межами цих діапазонів (біла область) зміна моди при коливальному русі не відбувається.

Окрім цього, при збільшенні частоти обертання стержнів в області модового збудження відбувається не лише зростання кількості напівхвиль, але й збільшення амплітуди коливань. Це викликає значні прогини стержня, внаслідок чого значно зростають напруження в перерізах до критичних значень, що неминуче призводить до руйнування.

Висновок

Представлені результати досліджень впливу поздовжніх віброударних навантажень на динамічну поведінку моделі вібробуру показали, що для стержнів різної довжини, якими моделюється робота зазначеного обладнання, існують діапазони частот дії поздовжнього ударного навантаження, при яких відбувається модове збудження поперечних

коливань зі зростанням числа напівхвиль. При збільшенні довжини стержнів, а також при збільшенні швидкості їх обертання ці діапазони розширюються. При збільшенні частоти обертання стержня в області модового збудження окрім зростання кількості напівхвиль відбувається збільшення амплітуди коливань, що викликає значні прогини стержня зі зростанням напружень до критичних значень.

Список літератури

1. Баженов В. А., Погорелова О. С., Постнікова Т. Г. Хаос та сценарії переходу до хаосу у віброударній системі. Київ: Вид-во «Каравела», 2019. 146 с.
2. Гуляев В. И., Гайдайчук В. В., Худолий С. Н. Компьютерное моделирование динамики конструкций установок глубокого бурения. *Збірник наукових праць Українського науково-дослідного та проектного інституту сталевих конструкцій імені В. М. Шимановського*. Київ, 2009. Вип. 4. С. 208–216.
3. Гуляев В. И., Гайдайчук В. В., Горбунович И. В. Бифуркационное выпучивание вертикальных колонн сверхглубокого бурения. *Промислове будівництво та інженерні споруди*. 2009. №2. С. 10–15.
4. Лізунов П. П., Недін В. О. Параметричні коливання пружних стержнів, що обертаються, під дією періодичних поздовжніх сил. *Управління розвитком складних систем*. 2020. № 44. С. 56–64.
5. Лізунов П. П., Недін В. О. Чисельне диференціювання форм вигину пружних стержнів значної довжини. *Управління розвитком складних систем*. 2021. № 46. С. 70–75.
6. Лізунов П. П., Недін В. О. Стійкість стержнів, що обертаються, під дією віброударного навантаження. *Onip матеріалів і теорія споруд*. 2021. Вип. 106. С. 113–121.
7. Недін В. О. Чисельне диференціювання складних форм вигину стержнів значної довжини при обертанні. *Управління розвитком складних систем*. 2020. № 43. С. 110–115.
8. Changgen Bu, Xiaofeng Li, Long Sun and Boru Xia. Arithmetic solution for the axial vibration of drill string coupling with a down-the-hole hammer in rock drilling. *Journal of Vibration and Control*. 2016. Vol. 22(13). P. 3090–3101.
9. Maurice Petyt. Introduction to Finite Element Vibration Analysis. Cambridge University Press, 1990. 558 p.
10. Songyong Liu, Xinxia Cui, Xiaohui Liu. Coupling vibration analysis of auger drilling system. *Journal of vibroengineering*. 2013. Vol. 15. P. 1442–1453.
11. Yimin Wei, Zhiwei Zhao, Wenhua Chen and Qi Liu. Influence of Axial Loads to Propagation Characteristics of the Elastic Wave in a Non-Uniform Shaft. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*. 2019 No. 32:70. P.13.

Стаття надійшла до редколегії 12.06.2025

Nedin Valentyn

Candidate of Technical Sciences, Department of Structural Mechanics,
<https://orcid.org/0000-0003-3138-2892>
 Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

MODE EXCITATION OF ROTATING ROD BENDING OSCILLATIONS UNDER THE AXIAL VIBRO-IMPACT LOAD

Abstract. The paper presents the investigation results of a vibro-drilling machine's drill-rod dynamic behavior when drilling wells in hard soil under the action of axial vibro-impact load, in order to identify the frequency ranges of higher-order vibration excitation. The drilling process of such wells is significantly facilitated in case of vibro-impact action. The destruction of rocks during vibro-rotary drilling occurs via the complex effect of vibration impulses and rotational motion. In this case, oscillations can occur with the growth of spatial harmonics, during which the mode of the natural oscillations increases. Thus, the task of studying the dynamic behavior of the system, in order to identify the frequencies of vibro-impact action at which the mode excitation of bending oscillations occurs with the growth of the half-wave number, becomes interesting. To find such frequency ranges of axial impact load action on an oscillating rod during rotation, a theoretical study was conducted using developed software, which implements a technique for computer simulation of the oscillatory motion of considerable length rotating rods under the action of axial periodic loads. Such software provides the possibility to model the oscillatory motion of rotating rods and determine the parameters by which the mode number of transverse oscillations of the studied system increases. Using this software, diagrams showing the ranges of impact frequencies in which mode excitation occurs with the growth of the half-wave number of the rod's

elastic line were drawn for different parameters of the considered system. The presented results show that for rods with different lengths there are ranges of frequencies of vibro-impact load at which the mode excitation of transverse oscillations occurs with the growth of the half-wave number. It is noted that with increasing rotational speed, the range of impact frequencies expands. The process of oscillation is considered in space with account of inertia forces and geometric nonlinearity of the rod. The conclusion about the possibility of running the equipment in certain frequency ranges is made.

Keywords: *geometric nonlinearity; inertia forces; axial forces; vibro-impact loads; vibro-drilling; mode excitation; bend forms*

References

1. Bazhenov V. A., Pohorelova O. S., Postnikova T. G. (2019). *Khaos ta stsenariyi perekhodu do khaosu u vibroudarniy systemi* (Chaos and scenarios to chaos transition in a vibroimpact system). Kyiv: Vyd-vo «Karavella», 146 p.p. [In Ukrainian]
2. Gulyayev V. I., Gaydaychuk V. V., Xudolij S. N. (2009). Computer modeling of dynamics of deep drilling rigs' constructions. *Scientific Works Journal of the Ukrainian Research Institute of Steel Structures named after V.M. Szymanowski*, 4, 208–216. [In Russian]
3. Gulyayev V. I., Gaydaychuk V. V., Gorbunovich I. V. (2009) Bifurcational buckling of vertical super-deep drilling columns. *Promyslove budivnytstvo ta inzhenerni sporudy*, 2, 10–15. [In Russian]
4. Lizunov, Petro, Nedin, Valentyn. (2021). The parametric oscillations of rotating elastic rods under the action of the periodic axial forces. *Management of Development of Complex Systems*, 44, 56–64.
5. Lizunov, Petro, Nedin, Valentyn. (2021). Numerical differentiation of bend forms of the long elastic rods. *Management of Development of Complex Systems*, 46, 70–75. [in Ukrainian]
6. Lizunov P. P., Nedin V. O. (2021). The stability of rotating rods under the action of vibro-impact load. *Strength of materials and theory of structures*, 106, 113–121.
7. Nedin, Valentyn. (2020). Numerical differentiation of complex bend forms of long rotating rods. *Management of Development of Complex Systems*, 43, 110–115. [in Ukrainian]
8. Changgen Bu, Xiaofeng Li, Long Sun and Boru Xia. (2016). Arithmetic solution for the axial vibration of drill string coupling with a down-the-hole hammer in rock drilling. *Journal of Vibration and Control*, 22(13), 3090–3101.
9. Maurice Petyt (1990). *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*. Cambridge University Press, 558.
10. Songyong Liu, Xinxia Cui, Xiaohui Liu. (2013) Coupling vibration analysis of auger drilling system. *Journal of vibroengineering*, Vol. 15, 1442–1453.
11. Yimin Wei, Zhiwei Zhao, Wenhua Chen, Qi Liu. (2019). Influence of Axial Loads to Propagation Characteristics of the Elastic Wave in a Non-Uniform Shaft. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 32:70, 13.

Посилання на публікацію

- APA Nedin, V. (2025). Mode excitation of rotating rod bending oscillations under the axial vibro-impact load. *Management of Development of Complex Systems*, 62, 164–169, [dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2025.62.164-169](https://doi.org/10.32347/2412-9933.2025.62.164-169).
- ДСТУ Недін В. О. Модове збудження згинальних коливань стержня, що обертається при поздовжньому віброударному навантаженні. *Управління розвитком складних систем*. Київ, 2025. № 62. С. 164 – 169, [dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2025.62.164-169](https://doi.org/10.32347/2412-9933.2025.62.164-169).