УДК 519.2

Ю.І. Мінаєва

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

ВИКОРИСТАННЯ НЕАРХІМЕДОВОЇ МЕТРИКИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Розглянуто нові способи врахування невизначеності, запропоновано розгляд основних понять теорії нечітких множин за допомогою неархімедової метрики. Для представлення нечітких чисел запропоновано використання p-адичних чисел. Наведено приклад.

Ключові слова: невизначеність, метрика, неархімедова метрика, p-адичний аналіз, дендрограма

Рассматриваются новые способы учета неопределенности, предложено рассмотрение основных понятий теории нечетких множеств с помощью неархимедовой метрики. Для представления нечетких чисел предложено использование p-адических чисел. Приведен пример.

Ключевые слова: неопределенность, метрика, неархимедова метрика, p-адический анализ, дендрограмма

New ways of account of uncertainty is observed, is offered consideration of main notions of fuzzy sets theory by means of non-Archimedean metric. Is proposed using of p-adic numbers for fuzzy numbers representation. Example is brought.

Key-words: uncertainty, metric, non-Archimedean metric, p-adic analysis, dendrogram

Сучасний стан проблеми

На сьогодні для розв'язання більшості практично важливих задач прийняття рішень застосовують сучасні інформаційні технології, засновані в тій чи іншій мірі на витягненні знань [1]. Одна з основних проблем теорії прийняття рішень – необхідність врахування невизначеностей, оцінювання і керування ризиками. Для опису невизначеності застосовують різні підходи, потрібно розібратися і оцінити раціональність використання та вимірювання різних величин, що використовуються в процесі ухвалення рішення. Вони можуть бути виміряні в тих чи інших кількісних або якісних шкалах, оскільки у виборі конкретної шкали існує визначена довільність (наприклад, відстань можна вимірювати в різних метриках). Природно прагнути того, щоб прийняте рішення не залежало від цієї довільності або хоча б її враховувало.

Проблема управління в умовах невизначеності в теоретичному і прикладному плані має принципове значення, не піддається сумніву важливість такого досягнення у такій галузі знань, як теорія нечітких множин (ТНМ) [2], яка стала одним з головних напрямків наукових досліджень з проблематики щодо врахування невизначеності.

Запропонована Л. Заде парадигма – теорія нечітких множин (НМ) – дала новий поштовх у розв′язанні задач управління за умов невизначеності і дала змогу вирішити низку прикладних задач. Створення теорії НМ як способу опису невизначеності має прямий зв′язок з відомою ідеєю Галілея про *координатизацію.*

Будь-які об'єкти, що є предметом математичного дослідження: криві, поверхні, відображення, величини та ін., можуть бути "координатизовані" чи "виміряні". Однак для такої координатизації "звичайних" чисел, звичної стандартної (архімедової) метрики, як показує практика, в цілій низці випадків далеко не досить. Зіштовхуючись з новим типом об'єктів, дослідник змушений розглядати їх «в умовах невизначеності», для якої необхідно конструювати і нові типи "величин" (об′єктів), що їх координатизують, і нові метрики.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Об'єктивно існує розходження між *явним* знанням, тобто інформацією, яку можна знайти у звітності підприємств та інформаційних базах даних, і *прихованим* знанням, що одержують з досвіду і передають непрямим шляхом. Загальне завдання полягає в тому, щоб дати інструмент *перетворення* прихованого знання у явне. Розробка вірних управлінських рішень у сучасних умовах вимагає використання ефективних методів виявлення прихованих знань, а також удосконалених способів узагальнення і представлення великих обсягів інформації. Для цього необхідно використовувати нові методи витягнення, узагальнення і представлення інформації, виявлення структур у масивах даних, а також витягнення нових знань з наявної інформації чи досвіду.

Сучасний підхід до моделювання невизначеності полягає не у створенні нових способів побудови функції належності (ФН), а у створенні механізмів витягнення нечіткості, що, в свою чергу, приводить до нової концепції отримання нечітких знань. Надзвичайно показовою в цьому плані є дискусія [3], в якій взяли участь провідні російські вчені на чолі з Д.О. Поспєловим. Зміст дискусії торкався сучасного стану і перспектив застосування ТНМ.

Головним результатом Круглого столу стала парадигма відмови від необхідності використання ФН і визначення місця нечіткої математики як задачі співвіднесення одних нечітких об′єктів з іншими, думки про перехід від вимірів до оцінок належності, судження про належність як поліморфне відображення з однієї шкали до іншої та ін.

На думку одного з провідних учасників круглого столу Д.О. Поспєлова «*...основним елементом у нечітких множинах є не функція належності, а процедура порівняння одних нечіткостей з іншими, деяка міра східності, за допомогою якої можна переходити від одних нечітких об′єктів до інших. ... світ нечіткої математики представляється у вигляді системи утворюючих (можливо навіть нескінченної або рахованої), на яких задані правила переходу від одних утворюючих до інших. ... це є не більше, ніж відображення одних нечітких сукупностей у інші. Це і є основна конструкція, яку потрібно формалізувати і досліджувати.”*».

Наведемо декілька положень, які розкривають сутність стану сучасних досліджень у ТНМ і дозволяють використати ці положення, щоб обґрунтувати розгляд невизначеності за допомогою неархимедової метрики:

- перехід від звичайної характеристичної функції множини до ФН є цілком природним. Однак ідея НМ як ФН не є єдиною, розвиток ТНМ у зв′язці з ФН не зобов′язаний йти у напрямку безумовного використання ФН. Існує безліч ситуацій, коли ФН збудувати неможливо або вона є такою, що не відтворює дійсної інформації, яка була закладена у емпіричному твердженні;
- домінування концепції ФН зумовлено її наочністю, існує еквівалентний підхід до представлення ФН нескінченним сімейством чітких відображень, зокрема, такою системою може бути система ітерованих функцій;
- нечітку математику рекомендується розглядати у вигляді системи утворюючих (можливо навіть нескінченної), на якій задані правила переходу від одних утворюючих до інших.

Надзвичайно важливим є визнання того факту, що умови невизначеності намагаються розглядати на рівні інтелектуальних систем з нечіткими знаннями, у більшості яких в якості оцінок використовуються наближені значення істинності, які, в свою чергу, задаються нечіткими числами.

Мета статті

Метою даної статті є *подання* методу врахування невизначеності за допомогою неархімедової метрики. Пропонується новий спосіб врахування невизначеності, що полягає в представленні невизначеності без використання ФН, а саме – за допомогою р-адичних чисел.

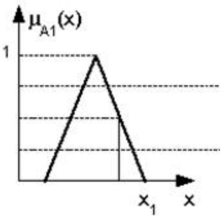
Основний матеріал досліджень

Зазначимо, що дійсними числами описується рух макроскопічних матеріальних об'єктів, частина природи, яка має описуватися р-адичними числами, невідома. Отже, в умовах невизначеності можуть мати місце ситуації, де р-адичний аналіз і застосування р-адичних чисел буде природним. Саме тому виникає потреба інтерпретації звичних способів представлення невизначеності за допомогою зазначених вище чисел. Надзвичайно актуальним є представлення нечітких чисел і нечітких множин у вигляді р-адичних чисел.

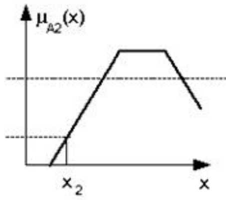
Розглянемо основні визначення ТНМ. Визначення НМ дано в роботах [2] Л. Заде, згідно з якими НМ $\widetilde{A}$ множини E являє собою множину впорядкованих пар $\{(x/\mu_{\widetilde{A}}(x))\}, \forall x \in E$, де $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ - ступінь належності x в A, $\mu_{\widetilde{A}} \to [0, 1]$. Якщо M - множина значень ФН, то $x \underset{\mu_A}{\sim\!\!\longrightarrow} M$.

Для визначення значення нечіткого числа можна прийняти твердження типу $\tilde{a}$ = *приблизно* a (з попередньо визначеною ФН) [6].

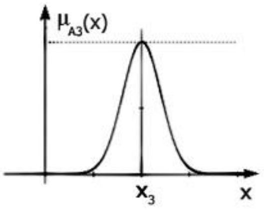
В теорії і практиці застосування НМ особливу роль грають трикутні і трапецієподібні ФН, що зумовлено їх простотою і прозорістю застосування. Приклади таких ФН наведено на рис. 1.



а



б



в

Рис. 1. Приклади типових ФН: *а* – трикутна ФН; *б* – трапецієподібна ФН; *в* – Гаусова ФН

Однією з особливостей сучасного стану прийняття рішень в умовах невизначеності є те, що будь-яка галузь науки працює переважно з полем речовинних чисел **R,** що є архімедовою числовою системою [2]. Відомо, що в **R** виконується аксіома Архімеда, яка неформально означає, що будь-який об'єкт може бути виміряний за допомогою лінійки. В теорії вимірів показано, що в більшості природно-наукових моделей таке припущення про можливість вимірів обґрунтоване, але не єдине. Раніше було показано, що невизначеність, в т.ч. невпорядкованість, представляються системою об'єктів (чисел), що мають ієрархічну структуру, які можуть бути описані тільки за допомогою неархімедових числових полів.

У роботі [4] доведено, що поля р-адичних чисел $\mathbf{Q}_p$ є базовими прикладами неархімедових числових полів і відзначається фундаментальна роль, яку відіграють р-адичні числа при описі різних природно-наукових явищ. Це зумовлене тим, що з теоретико-числової точки зору природа влаштована так, що починаючи аналіз з поля раціональних чисел **Q**, можна одержати або поле речовинних чисел **R**, або одне з полів р-адичних чисел $\mathbf{Q}_p$ (теорема О.Островського).

Якщо вважати «фізичними числами» тільки раціональні числа, то існує тільки дві можливості розвивати математичні моделі на основі раціональних фізичних даних: це архімедові дійсні моделі і неархімедові р-адичні моделі. На нашу думку, необхідно замислитись над тим, що, можливо, р-адичні координати описують якусь іншу частину природи [5], відмінну від макро- і мікросвіту, наприклад, т.зв. *фінансові потоки.* З великою імовірністю можна сказати, що фінансові потоки, які не є матеріальними, для свого опису можуть вимагати нових числових систем, бо числові системи, що застосовуються для матеріальних об'єктів, для них напряму не підходять.

В р-адичному базисі в полі $\mathbf{Q}_p$ існує природна метрика ρ_p, що має назву *ультраметрики*, неформальні властивості якої такі: дві нескінченні гілки дерева *близькі*, якщо довжина їх загальної частини, яка виходить з кореня, *велика* [5]. Зазначимо, що метричний простір — це пара (**X,d**), яка складається з деякої множини **X** елементів і відстані **d**, визначеної для будь-якої пари елементів цієї множини.

Неархімедова метрика визначається способом вимірювання відстані між раціональними числами, що виникають із такої «арифметичної» конструкції. Нехай $p \in N$ - довільне просте число, визначимо відображення $| \,|-|\, |_p$ на Q таким чином:

$$\|x\|_p = \begin{cases} \dfrac{1}{p^{ord_p x}}, \text{ якщо } x \neq 0, \\ 0, \quad \text{ якщо } x = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

де

$$\operatorname{ord}_p x = \begin{cases} \text{найбільший степінь числа } p, \text{який ділить } x, \\ \text{якщо } x \in Z \\ \operatorname{ord}_p a - ord_p b, \text{якщо } x = a/b, a, b \in Z, b \neq 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Визначена метрика належить до неархімедових, що володіють низкою парадоксальних властивостей: для неархімедового поля справедливо $\|x \pm y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$ і при $\|x\| \neq \|y\|$ досягається рівність. Цю властивість називають «принципом рівнобедреного трикутника». Норма називається *неархімедовою*, якщо для всіх x і y виконується нерівність $\|x + y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$.

Відстань, індукована неархімедовою нормою, (*ультраметрика)* – нерівність трикутника для звичайної функції відстані $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, трансформується в посилену нерівність трикутника $d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z))$. Відповідні метричні простори називаються ультраметричними просторами.

Звичайна відстань між раціональними числами визначається у вигляді $d(r_1, r_2)=\left|r_1 - r_2\right|_p$, однак відстань можна визначити за т.зв. р-адичною нормою. Будь-яке раціональне число r однозначно записується у вигляді дробу $r=p^k \cdot \frac{m}{n}$, де $k \in \mathbf{Z}$, m/n – нескорочуваний дріб, чисельник і знаменник якого взаємно прості з р. Величина p^{-k} – р-адична норма числа r і записується як $\|r\|_p$.

Зазначимо, що відстань, яка визначається з виразу $|r_1 - r_2|$ має властивості звичайної відстані, тобто задовольняє, зокрема, аксіомі трикутника $d_p(r_1,r_2)+d_p(r_2, r_3) \geq d_p(r_1, r_3)$.

Однак є принципові відмінності визначеної вищенаведеним чином відстані, що полягають у наявності у p-адичної відстані т.зв. неархімедових властивостей (ультраметрики).

P-адичне число має ієрархічну деревоподібну структуру (рис. 2). Важливим для аналізу є саме ця властивість і, з іншої сторони, всі ієрархічні структури описуються p-адичними числами. Також слід зазначити, що однією з властивостей таких чисел є те, що множина p-адичних чисел не впорядкована [6].

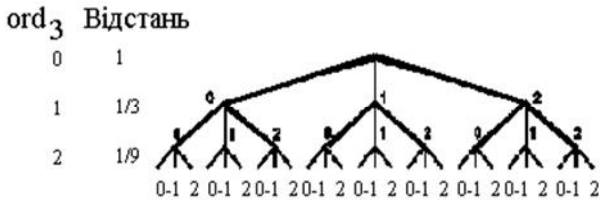


Рис. 2. Приклад 3-адичного подання числа

Цілі p-адичні числа можна додавати, віднімати і множити, тому в загальному випадку вони утворюють кільце, однак на відміну від Z в Q_p відсутній природний порядок.

Приклад переходу від нечіткого числа до p-адичної моделі

Припустимо, що маємо нечітке число (НЧ) *приблизно* $\tilde{5}$, яке характеризується трапецієподібною ФН, $\tilde{5} = \{4/0; 5/1;\ 6/1; 7/0\}$. Графічне подання НЧ $\tilde{5}_{trap}$ наведено на рис. 3.

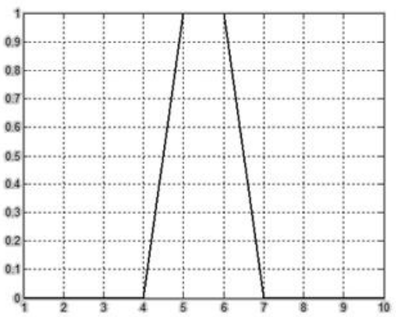


Рис. 3. Графічне подання НЧ

На основі значень, що характеризують НЧ, $\tilde{5}_{trap}$ – сукупності пар $\{(x/\mu_{\tilde{A}}(x))\}, \forall x \in E$, можемо побудувати дендрограму для даного НЧ шляхом реалізації нижченаведеної процедури.

```
x=pdist([4 0;5 1;6 1; 7 0;]);
y=linkage(x,'complete');
h=dendrogram(y);
set(h,'LineWidth',2)
grid on
```

Отриману дендрограму кодуємо бінарною абеткою і отримуємо бінарне дерево для НЧ (рис. 4).

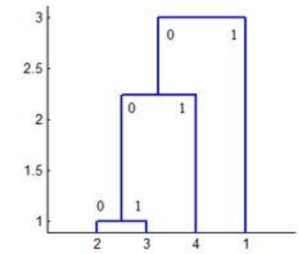


Рис. 4. Дендрограма, що характеризує НЧ $\tilde{5}$

На підставі отриманого бінарного дерева можемо записати структурну матрицю:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислення отриманого на підставі структурної матриці 2-адичного числа матиме такий вигляд: $a_2=2^1+2^2+2^3=14_2$. Таким чином, НЧ $\tilde{5}_{trap}$ в 2-адичному представленні має вигляд

$$\tilde{5}_{trap} \overset{\Delta}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 14_2,$$

де $\overset{\Delta}{=}$ дорівнює за визначенням.

Зазначимо, що p-адичне поле Qp може бути визначено як ряд Лоренца $\sum_{\nu=-m}^{\infty} a_\nu p^\nu, \in \{0,..., p-1\}$.

Відомо, що p-адична норма породжує топологію на полі Qp, яка перетворює це поле у повністю роз′єднаний простір, що тим не менш компенсується тим, що p-адичні диски ніколи не перекриваються. Отже, ультраметрична нерівність забезпечує деревоподібну топологію на множині дисків. Розглянемо одиничний диск - $D=\{x \in Q_p: |x|_p \leq 1\}=B_1(0)$, це підкільце Q_p, котре збігається з кільцем p-адичних цілих Zp,

$$Z_p = \left\{ \sum_{\nu=-m}^{\infty} a_\nu p^\nu, a_\nu \in \{0,..., p-1\} \right\}. \qquad (3)$$

У нашому випадку поле кінцевих розмірів з p-елементами $Z_p/pZ_p \cong F_p$. Це випливає з того, що одиничний диск покривається кінцевою кількістю трансляцій (копій) піддиска pZ_p:

$$Z_p = \bigcup_{x=0}^{p-1} (x+pZ_p). \qquad (4)$$

Отже, маємо ієрархічну структуру диска з p максимально менших піддисків. Знову змінюючи мірило і транслюючи попередній крок, можемо сказати, що будь-який p-адичний диск має точно p менших піддисків, які є максимальними піддисками. Зазначимо, що pZ мало точно один мінімальний найбільший диск, який вміщує pZ_p, і зветься D. Крім того, це підтримується для всіх p-адичних дисків.

Особливості будови p-адичних чисел надають їх сукупностям, тобто, полям Z_P (m = 0) і Q_P (m> 0), кластерну, фрактальну структуру. Всі множини натуральних чисел в р-адичній нормі стискаються до кластера ($0 \le x \le 1$). У загальному випадку поле Z_p (або Q_p) складається зі своїх примірників $\mathbf{Z}_p = \bigcup\limits_{n=\infty} p^n \mathbf{Z}_p$, тут множення на степінь р означає збільшення степеня роздільної здатності спостереження кластера в р разів.

На рис.5 показано, що концепція створення піддисків для НМ рівносильна створенню копій вихідної НМ для різних значень ФН. Наприклад, на рис.5 НЗ *приблизно* 5 з трикутною ФН, X = [0:1:9]; $\tilde{5} \overset{\Delta}{=} \mathrm{trimf}$ (X, [3 5 7]), що представляє одиничний диск, для μ = 0,5, має рівно два піддиски, для μ = 0,25 кожен піддиск ділиться на нових два піддиски і т.ін. Таким чином, НМ являє собою об'єднання нових НМ, отриманих в результаті поділу вихідної НМ. НМ аналогічно поганозумовленим множинам мають самоподібні структури.

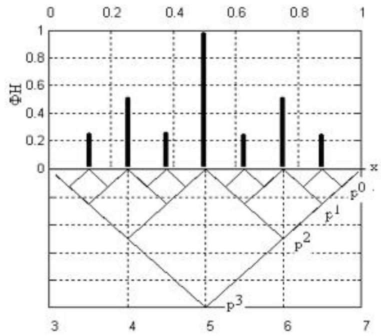
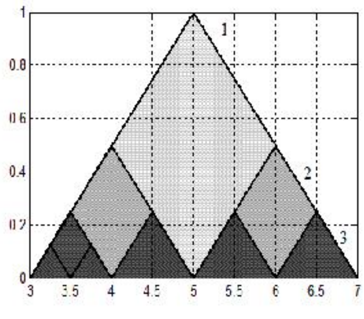


Рис. 5. Процес утворення самоподібних множин як піддисків на одиничному диску

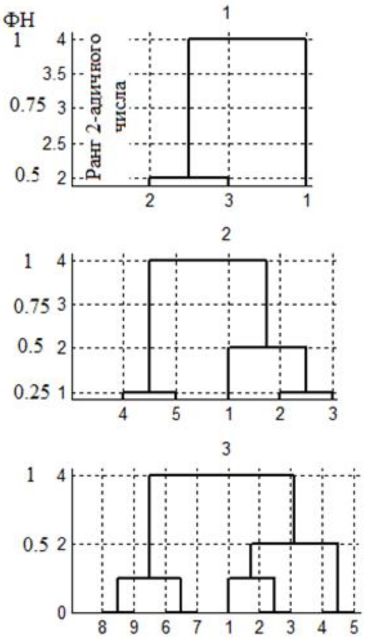
У р-адичному базисі дві НМ еквівалентні, якщо однакові (або близькі) максимальні ранги їх дендрограм.

На рис. 6 наведені самоподібні множини, які утворюють початкову НМ та їх р-адичні моделі.

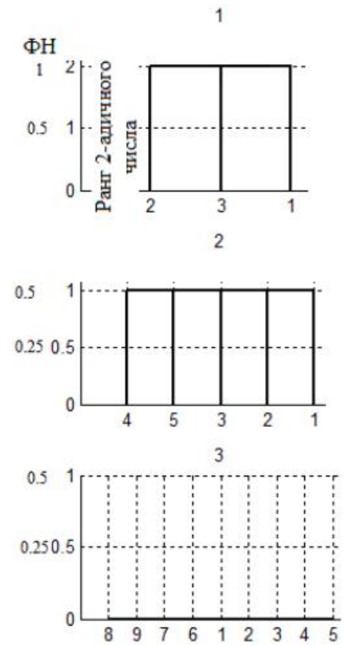


3	0	3	0	3	0
				3.5	0.25
		4	0.5	4	0.5
				4.5	0.25
5	1	5	0	5	0
				5.5	0.25
		6	0.5	6	0.5
				6.5	0.25
7	0	7	0	7	0

а



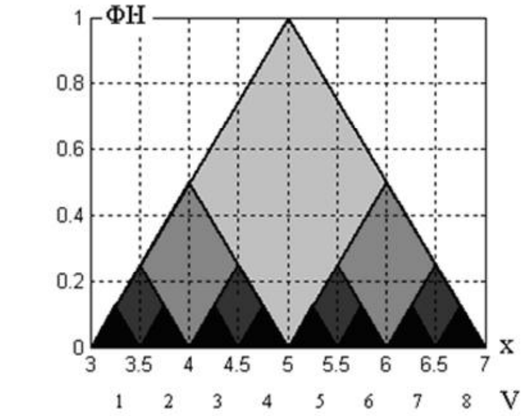
б



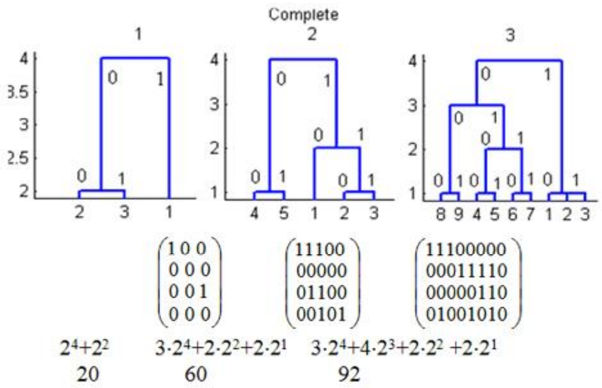
в

Рис. 6. Самоподібні множини, які утворюють початкову НМ та їх р-адичні моделі: *а* – НЗ *приблизно 5* з трикутною ФН, X=[0:1:9]; $\tilde{5} \overset{\Delta}{=} \mathrm{trimf}(X, [3\ 5\ 7])$ – сірий колір (1), самоподібні НЗ *приблизно 4* і *приблизно 6* (темносірий колір – 2), $\tilde{4} \overset{\Delta}{=} \{3/0\ 4/0.5\ 5/0\}$ $\tilde{6} \overset{\Delta}{=} \{5/0\ \ 6/0.5\ \ 7/0\}$, $\tilde{5} \supset \tilde{4} \cup \tilde{6}$; *приблизно 3.5* і *приблизно 4.5* (темний колір – 3), $\tilde{3}.5 \overset{\Delta}{=} \{3/0\ 3.5/0.25\ \ 4/0\}$, $\tilde{4}.5 \overset{\Delta}{=} \{4/0\ \ 4.5/0.25\ \ 5/0\}$, $\tilde{4} \supset \tilde{3}.5 \cup \tilde{4}.5$; *приблизно 5.5* і *приблизно 6.5* (темний колір – 3), $\tilde{5}.5 \overset{\Delta}{=} \{5/0\ 5.5/0.25\ 6/0\}$, $\tilde{6}.5 \overset{\Delta}{=} \{6/0\ 6.5/0.25\ \ 7/0\}$, $\tilde{6} \supset \tilde{5}.5 \cup \tilde{6}.5$; *б, в* – бінарні дерева копій НЗ *приблизно 5*, отриманих за методом найбільш віддаленого та найбільш близького сусіда відповідно.

На рис. 7 наведено самоподібні копії НЗ приблизно 5 з трикутною ФН при різній роздільній здатності системи.



а



б

Рис.7. Самоподібні копії НЗ: *а* – НЗ приблизно 5 та її самоподібні копії, НМ з трикутною ФН,

$$\tilde{5}=\{3/0,5/1,7/0\}=\{\tilde{4}\cup\tilde{6}\}==\{(\tilde{3}.5\cup\tilde{4}.5)\cup(5.5\cup 6.5)\}=$$

$$\{((\tilde{3}.25\cup\tilde{3}.75)\cup(\tilde{4}.25\cup\tilde{4}.75))\cup$$

$$((\tilde{5}.25\cup\tilde{5}.75)\cup(\tilde{6}.25\cup\tilde{6}.75)\}$$

б – бінарні дерева початкової НМ (метод найбільш віддаленого сусіда) та її копій

Таким чином, на підставі вищенаведених прикладів зазначимо, що використання p-адичних чисел для обліку невизначеності є актуальною задачею і може використовуватись для розв’язання задач, що оброблюють нечіткі дані, наприклад т.зв. фінансові потоки.

Висновки

Теорія нечітких множин як апарат розв'язання задач управління в умовах невизначеності може бути розглянута з урахуванням таких обставин:

– міра порядку в умовах невизначеності може бути повністю відсутня, або бути відмінною в порівнянні з умовами визначеності, зокрема, ця міра може бути неархімедовою;

– ФН є продуктом розумової (ментальної) діяльності людини, часто результатом інтуїтивного мислення, і повинна аналізуватись саме на цьому рівні;

– будь-який об'єкт в умовах невизначеності слід розглядати як новий тип об’єктів, для яких в загальному випадку необхідно конструювати нові типи "величин" і нові метрики.

Список літератури

1. *Хренников А.Ю. Неархимедов анализ и его приложения / А.Ю. Хренников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 216 с.*
2. *Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. Заде. – М.: Мир, 1976. – 165 с.*
3. *Поспелов Д.А. Из истории развития нечетких множеств и мягких вычислений в России. Круглый стол. Нужны ли функции принадлежности в будущей теории нечетких множеств? (Послесловие В.Б. Тарасова к Круглому столу) [Електронний ресурс] / Д.А. Поспелов. – Новости ИИ, 2001. – №2-3. Режим доступу: http://www.raai.org/library/ainews/2001/2-3/FuzzyRoundTable.pdf*
4. *Владимиров В.С. Р-адический анализ и математическая физика / В.С. Владимиров, И.В. Волович, Е.И. Зеленов. – М.: Физматлит, 1994. – 352 с.*
5. *Хренников А.Ю. Моделирование процессов мышления в р-адических системах координат / А.Ю. Хренников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 296 с.*
6. *Мінаєв Ю.М., Філімонова О.Ю., Вінник Д.М., Мінаєва Ю.І., Апонасенко Д.В. Нечіткі множини в ультраметричному просторі. – Проблеми управління та інформатизації, № 25. – 2009. – с. 11- 20.*

Стаття надійшла до редколегії 10.06.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. П.П. Лізунов, Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ.