УДК 519.6

Н.І. Полтораченко

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

"ІНТЕРВАЛЬНА" МОДЕЛЬ ПАРАМЕТРИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ІНЖЕНЕРНОЇ МЕРЕЖІ ПРИ ДОВІЛЬНІЙ ЦІЛЬОВІЙ ФУНКЦІЇ

Розглянуто задачу параметричної оптимізації інженерної мережі при довільній цільовій функції з дискретними та інтервальними змінними, які виражають невизначеність вихідних даних. Запропоновано алгоритм розв'язання задачі.

Ключові слова: інженерна мережа, параметрична оптимізація, математична модель, інтервальні змінні та функції

Постановка проблеми

Нагальною проблемою комунального господарства є проектування нових та реконструкція старих інженерних мереж (ІМ) [1;2]. Задача параметричної оптимізації ІМ є складовою частиною цього загального процесу. Розв'язання задачі в умовах невизначеності вихідних даних більш точно відображає реальну ситуацію при проектуванні.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Проектування нових та реконструкція старих ІМ є багатокритеріальною і багатовимірною задачею, яка вимагає нових підходів до її розв'язання, необхідності одночасного урахування як детерміністських вихідних даних, так і тих, що можуть змінюватися з плином часу [3]. Застосування функціонально-динамічних схем для моделювання інженерної мережі розглянуто у статті [4]. Невизначеність інформації в задачах оптимізації частіше виражається через нечіткі числа та функції [5].

Формулювання мети статті

Метою статті є розробка методу розв'язання задачі параметричної оптимізації в умовах невизначеності вихідної інформації, яка виражається через інтервальні числа та функції. Розглянуто варіант довільного характеру цільової функції. Ця стаття є розвиненням думок, що наведені у роботі [6].

Виклад основного матеріалу

Задача параметричної оптимізації ІМ має вигляд:

$$\sum_{i=1}^{v} y_i(h_i, q_i, D_i) \to \min$$

при обмеженнях

$$B \cdot \vec{h} = 0,$$
$$A \cdot \vec{q} = 0,$$
$$q_{i_{\min}} \le q_i \le q_{i_{\max}}, i = 1, 2, ..., v,$$
$$h_{i_{\min}} \le h_i \le h_{i_{\max}}, i = 1, 2, ..., v,$$
$$D_{i_{\min}} \le D_i \le D_{i_{\max}}, i = 1, 2, ..., v,$$
$$D_i \in \left\{D_{i1}, ..., D_{iW_i}\right\}, i = 1, 2, ..., v,$$

де $\overline{h} = (h_1, ..., h_v)$ – вектор паралельних змінних мережі; $\vec{q} = (q_1, ..., q_v)$ – вектор послідовних змінних мережі; v – кількість дуг графа, що описує ІМ; A – матриця інцедентності дуг та вершин графа; B – цикломатична матриця, що встановлює відповідність дуг фундаментальним циклам графа; $D_i \in \left\{D_{i1}, ..., D_{iW_i}\right\}$ – діаметр *i*-ї комунікації; W_i – кількість допустимих значень дискретної змінної D_i; $y_i(h_i, q_i, D_i)$ – капітальні та експлуатаційні витрати, що припадають на *i*-у комунікацію; функції y_i є опуклими.

Оптимізація параметрів ІМ відбувається при відомих послідовних змінних та довжинах комунікацій, що приводить до еквівалентності визначення діаметрів D_i та паралельних змінних h_i (i=1,2,…,v), тобто $h_i = f_i(D_i)$. Невизначеність вихідних даних будемо виражати через інтервальний характер функцій f_i (i=1,2,…,v). Тоді задача оптимізації буде містити як дискретні змінні D_i, так і інтервальні h_i (i=1,2,…,v). Перейдемо від дискретних змінних до інтервальних. Якщо f_i (i=1,2,…,v) – інтервальна функція, то кожному $D_{iw} (w = 1, 2, ..., W_i)$ відповідає інтервал $h_{iw} = \left[\underline{h}_{iw}, \overline{h}_{iw}\right]$. Оскільки $D_i \in \left[D_{i1}, D_{iW_i}\right]$, то

$h_i \in \left[h_i^*, h_i^{**}\right]$, де $h_i^* = \max\left\{\min_w \underline{h}_{iw}, h_{i_{\min}}\right\}$, $h_i^{**} = \min\left\{\max_w \overline{h}_{iw}, h_{i_{\max}}\right\}$.

Таким чином отримали задачу оптимізації з інтервальними змінними h_i (i=1,2,…,v) та новою областю визначення для кожної $h_i = \left[\underline{h}_i, \overline{h}_i\right]$. Враховуючи інтервальний характер змінних та визначення суми для інтервальних чисел, перше обмеження задачі параметричної оптимізації буде мати вигляд

$$\sum_{i\in M_p^+}\left[\underline{h}_i, \overline{h}_i\right] - \sum_{i\in M_p^-}\left[\underline{h}_i, \overline{h}_i\right] =$$

$$= \left[\sum_{i\in M_p^+}\underline{h}_i, \sum_{i\in M_p^+}\overline{h}_i,\right] - \left[\sum_{i\in M_p^-}\underline{h}_i, \sum_{i\in M_p^-}\overline{h}_i,\right] = 0,$$
$$p = 1, 2, ..., P,$$

де P – кількість фундаментальних циклів; M_p^+ – множина індексів змінних h_i, які входять до обмеження p зі знаком «+»; M_p^- – множина індексів змінних h_i, які входять до обмеження p зі знаком «-». Скориставшись загальним визначенням різниці інтервальних чисел та ввівши похибку ξ_p для кожного p-го обмеження (p=1,2,…,P), обмеження, що розглядаємо, перетворимо у нерівності

$$-\xi_p \le \sum_{i\in M_p^+}\underline{h}_i - \sum_{i\in M_p^-}\overline{h}_i \le \xi_p,$$
$$-\xi_p \le \sum_{i\in M_p^+}\overline{h}_i - \sum_{i\in M_p^-}\underline{h}_i \le \xi_p.$$

Для пошуку інтервалів $[\lambda_i, \eta_i]$ (i=1,2,…,v), де виконуються обмеження, достатньо розв'язати задачу лінійного програмування

$$\sum_{i=1}^{v}\eta_i - \sum_{i=1}^{v}\lambda_i \to \max,$$
$$-\xi_p \le \sum_{i\in M_p^+}\lambda_i - \sum_{i\in M_p^-}\eta_i \le \xi_p,$$
$$-\xi_p \le \sum_{i\in M_p^+}\eta_i - \sum_{i\in M_p^-}\lambda_i \le \xi_p. \quad p=1,2,\dots,P,$$

що можна довести методом від супротивного. Припустимо, що побудована задача розв'язана, тобто знайдено розв'язок λ_i' та η_i' (i=1,2,…,v), який максимізує цільову функцію, і існує хоча б одне значення δ_i', яке не увійшло до інтервалу $[\lambda_i', \eta_i']$ (i=1,2,…,v), але задовольняє обмеженням задачі. Тоді якщо $\delta_i' < \lambda_i'$, то цільова функція збільшиться на $\lambda_i' - \delta_i'$, а якщо $\delta_i' > \eta_i'$, то цільова функція збільшиться на $\delta_i' - \eta_i'$, що не відповідає твердженню про оптимальність розв'язку.

Визначення інтервалів $[\lambda_i', \eta_i']$ (i=1,2,…,v) дозволяє значно звузити область пошуку змінних $\underline{h}_i, \overline{h}_i$ (i=1,2,…,v). Очевидно, що для зростаючої функції $y_i(h_i)$ $\underline{h}_i = \lambda_i$, а для спадної функції $y_i(h_i)$ $\overline{h}_i = \eta_i$.

Переходимо до розв'язання вихідної задачі:

$$\sum_{i=1}^{v}(y_i([\underline{h}_i, \overline{h}_i]) \to \min,$$
$$\underline{h}_i = \lambda_i, \quad i \in W^*,$$
$$\overline{h}_i = \eta_i, \quad i \in W^{**},$$
$$\lambda_i \le \underline{h}_i \le \overline{h}_i \le \eta_i,\ i=1,2,\dots,v,\ i \,\overline{\in}\, W^*, \quad i \,\overline{\in}\, W^{**},$$
$$\sum_{i=1}^{v}(\overline{h}_i - \underline{h}_i) \ge Q,$$

де W^* – множина індексів, що відповідають зростаючим функціям y_i; W^{**} – множина індексів, що відповідають спадним функціям y_i.

Розглянемо випадок, коли функції $y_i(h_i)$ опуклі, але не є сепарабельними відносно $\underline{h}_i, \overline{h}_i$. Задача не може бути віднесена до задач блочного програмування, тому для її розв'язання пропонується такий конструктивний підхід.

На інтервалах $[\lambda_i, \eta_i]$ (i=1,2,…,v) виділимо усі належні їм $\underline{h}_{im}$ та $\overline{h}_{il}$ (m=1,2,…,M_i, l=1,2,…,L_i). Тоді кожний інтервал $[\lambda_i, \eta_i]$ розбивається на B_i інтервалів $[h_{i(b-1)}, h_{ib}]$ (b=1,2,…, B_i, $B_i = M_i + L_i + 1$), а задача буде мати вигляд:

$$\sum_{i=1}^{v}\sum_{b=1}^{B_i}([\underline{y}_{ib}, \overline{y}_{ib}]x_{ib}) \to \min$$

при обмеженнях

$$1)\sum_{i=1}^{v}\max_b\{h_{ib}x_{ib}\} - \max\{0, \min_b(h_{i(b-1)}x_{ib})\}) \ge Q,$$

$$2)\sum_{b=1}^{B_i}x_{ib} \ge 1, i = 1, 2, ..., v,$$

$$3)x_{ib} \in \{0, 1\}, i = 1, 2, ..., v, b = 1, 2, ..., B_i,$$

4) рівні 1 тільки сусідні змінні x_{ib} по b для i=1,2,…,v, де

$$\underline{y}_{ib} = \min\{\overline{y}_i(h_{i(b-1)}), \overline{y}_i(h_{ib})\},$$
$$\overline{y}_{ib} = \max\{\overline{y}_i(h_{i(b-1)}), \overline{y}_i(h_{ib})\}.$$

Отримали задачу булевого програмування. Оскільки задача параметричної оптимізації ІМ містить велику кількість змінних, то задача булевого програмування може виявитися нерозв'язуваною. Тому пропонується алгоритм її розв'язку, що складається з послідовності кроків, на кожному з яких розв’язується задача булевого програмування меншої розмірності.

Алгоритм.

Ітерація 0.

1) S=0, f_s=0.
2) S=S+1. Знайти S-й розв’язок, що мінімізує цільову функцію

$$f_s = \sum_{i=1}^{v}\sum_{b=1}^{B_i}\overline{y}_{ib}z_{ib}$$

при обмеженнях

$$\sum_{b=1}^{B_i} z_{ib} = 1, i = 1,2,...,v,$$

$$z_{ib} \in \{0,1\}, i = 1,2,...,v, b = 1,2,...,B_i,$$

$$f_s > f_{s-1}.$$

Ітерація S. Розглядаються значення $z_{il_i} = 1$ (i=1,2,…,v), які отримані при розв’язуванні задачі, що складена на нульовому кроці. Для кожного l_i визначається t_i таке, що

а) $\overline{y}_{it_i} = \max\limits_t(\overline{y}_{it}) \le \overline{y}_{il_i}$, якщо на проміжку $[\lambda_i, \eta_i]$ функція $\overline{y}_i$ як зростає, так і спадає,

б) $\overline{y}_{it_i} = \min\limits_t(\overline{y}_{it})$, якщо на проміжку $[\lambda_i, \eta_i]$ функція $\overline{y}_i$ тільки зростає або тільки спадає.

Розв’язується задача булевого програмування

$$\sum_{i=1}^{v} \max_b\{h_{ib}x_{ib}\} - \max\{0, \min_b(h_{i(b-1)}x_{ib})\}) \to Q$$

при обмеженнях

1) рівні 1 тільки сусідні змінні x_{ib} по b для i=1,2,…,v,
2) $x_{il_i} = 1$,

$x_{ib} \in \{0,1\}$, якщо b=l_i+1,…,t_i при t_i> l_i, або якщо b=t_i,…,l_i-1 при t_i< l_i,

$x_{ib} = 0$ для інших b (i=1,2,…,v),

де $h_i = \bigcup\limits_b([h_{i(b-1)}, h_{ib}]x_{ib})$ (i=1,2,…,v).

Вибір цільової функції пов’язаний з тим, що чим ширший діапазон h_i, тим більший вибір відповідних йому діаметрів комунікацій.

Якщо задача S-ї ітерації має розв’язок, то він найкращий. Якщо ні, то переходимо до кроку 2 ітерації 0. Розв’язування продовжується доти, поки задача S-ї ітерації не буде розв’язана або будуть розглянуті всі розв’язки задачі кроку 2 ітерації 0. За знайденими значеннями змінних h_i визначаються значення діаметрів комунікацій D_i (i=1,2,…,v).

Висновки

Оскільки на кожному кроці 2 ітерації 0 приймається таке сполучення z_{ib} (i=1,2,…,v, b=1,2,…, B_i), яке забезпечує найменше значення цільової функції, що більше за попереднє (y_i опукла), то отримавши на черговому кроці допустимий розв’язок, отримаємо і найкращий розв’язок для вихідної задачі.

Список літератури

1. Храменков С.В. Стратегия модернизации водопроводной сети / С.В. Храменков. – М.: Стройиздат, 2005.

2. Стратегія проведення моніторінгу й реформування систем муніципального водопостачання // Водопостачання та водовідведення: Н.Г. Насонкіна, В.В. Дорофієнко, В.М. Маслюк, С.Є. Антоненко, В.М Сахновська. Виробничо-практичний журнал. – К., 2009. - №2. – С.2-8.

3. Демченко В.В. Переваги онтологічного підходу до розподіленого моделювання інженерних та транспортних мереж // Містобудування та територіальне планування: В.В. Демченко Наук.-техн.збірник. – К.: КНУБА, 2008. – Вип.29. – С.79-83.

4. Застосування функціонально- динамічних схем для моделювання інженерної мережі водопостачання міста // Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравліки: П.І. Анпілогов, В.М. Михайленко, А.П. Анпілогов, Ю.В. Кошарна. Наук.-техн.збірник. – К., КНУБА, 2007. – Вип.27 . – С.8-13.

5. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій.: Підручник /Ю.П. Зайченко. – К.: 2000. – 688 с.

6. .Полтораченко Н.І. Декомпозиція задачі параметричної оптимізації в умовах невизначеності інформації // Управління розвитком складних систем: Н.І.Полтораченко. Збірник наукових праць. – К: КНУБА, 2010. – Вип.2 . – С.45-48.

Стаття надійшла до редколегії 21.11.2011

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.М. Міхайленко, Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ.