УДК 681.5 (07)

Е.В.Федусенко, А.А.Федусенко

Киевский национальный университет строительства и архитектуры,Киев

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЕ НЕЧЕТКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО СПРОСА

Рассмотрены проблемы доработки предложенной ранее многокритериальной модели, предназначенной для моделирования спроса потребителей на группу товаров, выпускаемых предприятием. Разработанная модель позволяет не только моделировать спрос, но максимизировать прибыль предприятия и минимизировать себестоимость разработки продукции.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, нечеткая оптимизация, оптимизация себестоимости, спрос

Постановка проблемы и анализ основных исследований

Рассмотрим предложенную ранее модель, предназначенную для проведения моделирования спроса на группу товаров выпускаемых предприятием (1)[1].

$$\sum_{i=1}^{n} C_i x_i \to \max;$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le b; \qquad (1)$$

$$x_i \le q_i, \ \mathrm{i}=1,..,\mathrm{n} \qquad x_i \ge 0, \ i=1,..,n,$$

где C_i – коэффициент полезности i-го товара; p_i – цена i-го товара; x_i – объем i-го товара, который купит потребитель; b – доход; q_i – максимальный объем i-го товара.

Коэффициент полезности товара учитывает основные факторы, влияющие на спрос, и рассчитывается с использованием методов ранжирования и линейной свертки критериев.

Целью работы является повышение эффективности управления предприятием за счет планирования выпуска продукции и оптимизации себестоимости и прибыли.

Для достижения цели была поставлена задача – доработать предложенную ранее модель так, что бы можно было минимизировать себестоимость и максимизировать прибыль предприятия при моделировании спроса.

Основной материал исследования

Предложенная ранее модель не учитывает нескольких важных моментов, а именно:

1. Цена товара не должна быть ниже себестоимости, поскольку такая цена даже при достаточно большом спросе, приведет к убыткам предприятия, что не допустимо, поскольку, основной целью данной работы является повышение эффективности управления предприятием. Следовательно, в предложенную ранее модель необходимо ввести еще одно ограничение, которое будет учитывать зависимость цены товара от себестоимости.

$p_i \ge S_i,$

где S_i – себестоимость i-го товара.

2. С точки зрения эффективности управления предприятием, основной целью имитационного моделирования спроса является максимизация прибыли самого предприятия. Данное утверждение можно представить в виде следующей целевой функции:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i q_i \to \max.$$

3. Кроме максимизации прибыли предприятия, эффективное управление предполагает минимизацию затрат на изготовления той или иной продукции, т.е. минимизацию себестоимости. Следовательно, в предложенную ранее модель добавляется еще одна целевая функция:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i q_i \to \min.$$

Однако при рассмотрении себестоимости нерационально ограничиваться одним значением. Необходимо указать интервал значений для себестоимости, т.е. $S_i \in [S_i^L ... S_i^U],\ i=1..n.$

Такая задача оптимизации называется нечеткой.

4. Также необходимо учитывать, что

разрабатываемая имитационная модель предназначена для применения на конкретных предприятиях. Следовательно, количество продукции определенного вида на каждом из складов конечно, а значит, в данной модели необходимо учитывать и объемы складов. Ограничение на склад можно описать следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \le O,$$

где O – размер склада.

Проведем анализ основных методов нечеткой оптимизации, которые можно применить для минимизации себестоимости, описанных в [2].

Постановка задачи линейного программирования с нечеткими целевыми функциями

Предположим, что только один элемент из пространства $[S_1^L \ldots S_1^U] \times [S_2^L \ldots S_2^U] \times \ldots \times [S_n^L \ldots S_n^U]$ является истинным вектором коэффициентов целевой функции минимизации себестоимости. Тогда данная задача имеет единственный вектор целевой функции, но возникает проблема, которая содержит бесконечное множество целевых функций следующего вида:

$z(q)=S^T q \rightarrow \min$ (2).

Данные функции должны быть минимизированы одновременно для $q \in Q$, где $Q=\{q{:}q\le O;q\ge 0\}$. Все векторы $S \in R^n$ из ограниченного интервала $S^0=\{s{:}s_L \le s \le s_U\}$; $s_L^T=\{s_1^L,s_2^L,\ldots,s_n^L\}$; $s_U^T=\{s_1^U,s_2^U,\ldots,s_n^U\}$ должны рассматриваться как параметры.

«Полное» решение задачи линейного программирования с интервальными коэффициентами вида (3):

$$\min\{ z(q)=S^T q \mid q{:}q\le O;q\ge 0\} \qquad (3)$$

определяется как

$$E=\{q \in Q \mid \exists \overline{q} \in Q, \exists s_1 \in S^0 S_1^T \overline{q} \ge S_1^T q, \forall q \in Q\}.$$

Нахождение такого «полного» решения является не только затруднительным, но и требует больших затрат. Поэтому достаточно часто в задачах оптимизации с несколькими целевыми функциями вместо множества эффективных решений ищут одно компромиссное [2].

Определение компромиссного решения приводится в [2].

Если функция $H{:}Q\rightarrow R$-функция предпочтения для задачи (3), то элемент $q^*\in Q$ называется компромиссным решением задачи (2), если $q^*\in E$ и $H(q^*)\ge H(q)$, $\forall q \in Q$.

Поиск компромиссного решения

Для определения компромиссного решения задачи линейного программирования существуют различные функции, называемые функциями предпочтения. Данные функции преобразовывают множество целевых функций в единственную компромиссную целевую функцию.

Простейший метод, использующий данный подход и описанный в [1], заключается в том, что выбирается одно значение s^*_i для каждого интервала $[S_i^L \ldots S_i^U]$, и вместо задачи (2) необходимо решить следующую задачу линейного программирования:

$$\min\{z(q)=\sum_{i=1}^{n} S_i q_i \mid q \le O; q \ge o\} \qquad (4)$$

Исключив два крайних случая, максимальный и минимальный, получим:

$z_{min}=S_L^T q$, $z_{max}=S_U^T q$.

Для получения компромиссного решения s^* необходимо выбрать в каждом интервале значение с наибольшей вероятностью появления. Но если у ЛПР нет достаточно сведений для принятия такого решения, то можно выбрать середину данного интервала. $[S_i^L \ldots S_i^U]$ получим,

$$z=0.5[z_{min}(q)+z_{max}(q)]=0.5[S_L^T+S_U^T]q. \qquad (5)$$

Дальнейшим развитием такого подхода является использование целевой функции, которая базируется на решающем правиле Гурвица.

Критерий Гурвица основан на следующих двух предположениях: природа может находиться в самом невыгодном состоянии с вероятностью 1-α и в самом выгодном – с вероятностью *α,* где *α* – коэффициент доверия [2].

$$z(q)=(1-\tau)z_{min}(q)+\tau z_{max}(q)=[(1-\tau)\, S_L^T+\tau S_U^T]q, \qquad (6)$$

где *τ*– параметр оптимизма, который отражает отношения к риску со стороны ЛПР.

Основным недостатком вышеприведенных подходов является то, что все они работают не с целым интервалом S^0, а с отдельными его значениями.

Если у ЛПР нет возможности выбрать только одно какое-либо значение из интервала S^0, необходимо использовать косвенный путь построения компромиссной целевой функции описанный в [2].

Сначала происходит фиксация множества состояний природы:

z_j, $j=1..w$,

как состояний неопределенности. Выбор состояний происходит таким образом, что бы у ЛПР была возможность :

1) привести вероятность состояний $p(z_j)$;

2) наиболее точно определить параметры для каждого из состояний.

Исходя из всего вышесказанного, используя подход Бернулли, ожидаемая величина

$$q = \sum_{j=1}^{w} s_j^T q p(z_j) = \sum_{j=1}^{w} s_j^T p(z_j) q \qquad (7)$$

выбирается функцией компромисса.

Так как $s_j p(z_j) \in S^0$, для каждого из векторов состояний и для любого распределения вероятностей $\{p(z_j)\}$, то любая функция компромисса приведет к эффективному решению оптимизационной задачи. Но нерешенным остается вопрос о возможности получения необходимой информации о значениях $\{p(z_j)\}$,$\{s^*_j\}$[2].

Общая постановка задачи

Необходимо провести моделирование спроса на группу товаров, выпускаемых предприятием для потребителей с разным уровнем дохода.

Основной целью данного моделирования является повышение эффективности управления предприятием.

Пусть J={1..m} множество потребителей с доходом bj.

На основе проведенного ранее анализа автором сформулирована следующая математическая модель, предназначенная для имитационного моделирования спроса:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \to \max \\
&\sum_{i=1}^{n} p_i q_i \to \max \\
&\sum_{i=1}^{n} S_i q_i \to \min \\
&\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} \le b_j \qquad (8) \\
&\sum_{i=1}^{n} q_i \le O \\
&p_i \ge S_i \\
&S_i \in [S_i^L \ldots S_i^U] \\
&x_{ij} \le q_i \text{ , } i=1,..,n, j=1..m \\
&x_{ij} \ge 0 \text{ , } i=1,..,n, j=1..m
\end{aligned}$$

Данная модель является моделью многокритериальной нечеткой оптимизации.

В общем виде задача многокритериальной оптимизации может быть определена следующим образом.

Постановка задачи многокритериальной оптимизации

Для каждого объекта (проекта, минимизация затрат и т. п.) вводят вектор – критерий $\vec{n}=\{N_1,N_2,..,N_m\}$, в котором частный критерий N_j представляет функцию параметров $x_1,x_2,...,x_n$ (которые определяют, например, характеристики управлений проектом и т. п.). Функциональная зависимость частных критериев от параметров задачи задается, и тогда основная математическая модель многокритериальной оптимизации будет сформулирована так:

$$\begin{cases} f_j(\vec{x}) \to \min_{x \in R_n} \\ X = \{\vec{x} / \vec{x} \in R_n, q_e(\vec{x}) \le 0\} e \in 1,\vec{v}, v < n \end{cases} \quad j = 1,\overline{m}. \qquad (9)$$

В этой модели X – множество допустимых решений, удовлетворяющих определенным ограничениям, которые даны в виде системных неравенств $q_e(\vec{x}) \le 0$, накладываемых на вектор параметров $\vec{x}=\{X_1,X_2,\ldots,Xn\}$[3].

Функция $f_j(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ будет называться j-той целевой функцией, а вся совокупность $f_1(\overline{X}_1),...,f_m(\overline{X}_m)$ образует векторную целевую функцию многокритериальной оптимизации [4].

Преобразование из многокритериальной в однокритериальную задачу

Одним из возможных путей решения многокритериальных задач является путь преобразования из многокритериальной в однокритериальную задачу. Рассмотрим более подробно такой подход, приведенный в [4].

Отметим, что поскольку F(x) является неким вектором, то любые компоненты F(x) являются конкурирующими, и отсутствует некое единое решение поставленной задачи. Вместо него для описания характеристик целей используется концепция множества точек неулучшаемых решений (так называемая оптимальность по Паретто). Неухудшаемым решением будем называть такое решение, при котором улучшение в одной из целей приводит к ухудшению в другой.

Рассмотрим данную концепцию детальней. Пусть существует некая область допустимых решений Ω в параметрическом пространстве $x \in X$. Данное пространство удовлетворяет все принятые ограничения, т.е:

Ω={ $x \in R_n$ }

при заданных в (10) ограничениях.

Отсюда возможно определить соответствующую область допустимых решений для пространства целевых функций Λ.

Λ={ $y \in R_n$ },

где y=F(x) при условии $x \in$ Ω.

Определение точки неулучшаемого решения приведено в [4].

Точка $x^* \in \Omega$ является неулучшаемым решением, если для некоторой окрестности x^* нет некого Δx такого, что $(x^*+\Delta x) \in \Omega$ и

$Fi(x^*+\Delta x) \le Fi(x^*)$, i =1,…,m (10)

$Fj(x^*+\Delta x) \le F_j(x^*)$, для некого j

Поскольку любая из точек пространства Ω, то есть пространство, не имеющее неухудшаемых точек, является точкой, в которой любое улучшение может быть достигнуто во всех выбранных целях, то ясно, что такая точка не представляет никакой ценности. Следовательно, многокритериальная оптимизация должна включать в себя определенную генерацию и выбор точек с неулучшаемыми решениями [4].

Декомпозиция многокритериальной нечеткой задачи моделирования потребительского спроса

Следующим путем для решения многокритериальной задачи является ее декомпозиция, т.е. дробление на отдельные однокритериальные задачи оптимизации. Пример такой декомпозиции можно найти в [5].

Именно данный подход и предлагается использовать для решения разработанной имитационной модели спроса.

Сначала решим две однокритериальные задачи оптимизации для минимизации себестоимости и максимизации прибыли. При этом необходимо помнить, что первая задача является задачей нечеткой оптимизации.

1. Минимизация себестоимости:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} S_i q_i \to \min \\ \sum_{i=1}^{n} q_i \le O \\ q_i \ge 0 \\ S_i \in [S_i^L \dots S_i^U] \end{gathered} \qquad (11)$$

2. Максимизация прибыли:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} p_i q_i \to \max \\ p_i \ge S_i \\ p_i \ge 0 \end{gathered} \qquad (12)$$

После чего на каждом такте расчета j будем последовательно решать однокритериальную задачу моделирования спроса:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \to \max \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} \le b_j \\ x_{ij} \le q_i, \ i = 1,..,n, j=1..m \\ x_{ij} \ge 0, \ i = 1,..,n, \ j=1..m. \end{gathered} \qquad (13)$$

Как мы видим, разработанные модели тесно связаны между собою общими параметрами, поэтому на любом шаге моделирования спроса может возникнуть необходимость пересчитать показатели, получаемые в моделях (11) и (12).

Каждую из моделей (11)-(13) можно привести к целочисленному виду, поэтому при их решении целесообразно использование методов линейной целочисленной оптимизации.

Выводы

В данной статье была произведена доработка предложенной ранее многокритериальной модели, предназначенной для моделирования спроса на группу товаров, выпускаемых предприятием. Новая нечеткая многокритериальная модель позволяет не только провести моделирование спроса, но и минимизировать себестоимость товара и максимизировать прибыль предприятия. При минимизации себестоимости используется нечеткая целевая функция, которая позволяет задать значение себестоимости товара в виде интервала.

Также в статье была произведена общая постановка задачи многокритериальной оптимизации, рассмотрены методы решения данной задачи, а именно метод приведения ее к однокритериальному виду и метод декомпозиции. Для решения поставленной нечеткой многокритериальной задачи моделирования спроса потребителей был выбран метод декомпозиции.

Применение разработанной модели позволит найти оптимальную цену на товар, как с точки зрения покупателя, так и с точки зрения предприятия.

Список литературы

1. *Федусенко Е.В. Федусенко А.А.. Моделирование и прогнозирование спроса методами многокритериальной оптимизации // Управление развитием сложных систем. – 2010. – Вып. 3.*
2. *Зайченко Ю.П. Исследование операций. Киев: Слово, 2003. 688 с.*
3. *Денисенко Т. И. Проблемы многокритериальной оптимизации // Сборник научных трудов СевКавГТУ. 2006. № 2. С. 9-11.*
4. *Трифонов А.Г. Многокритериальная оптимизация // Консультационный центр MATLAB: раздел Optimization Toolbox. – Интернет-ресурс: http://matlab.exponenta.ru/optimiz/book_1/16.php*
5. *Прилуцкий М.Х., Власов С.Е. Оптимальное распределение ресурсов в задачах календарного и объемно-календарного планирования //Труды Нижегородского государственного технического университета. Системы обработки информации и управления. 2004, вып. 11. С. 31-36.*

Статья поступила в редколегию 7.12.2010

Рецензент: д-р техн. наук, профессор С.В. Цюцюра, Киевский национальный університет строительства и архитектуры, Киев.