УДК 658.512

А. В. Хроленко, И.Н. Доманецкая

Киевский Национальный университет строительства и архитектуры, Киев

МЕХАНИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ РАСПИСАНИЙ ПОТРЕБЛЕНИЯ РЕСУРСОВ КАК ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ТОЧЕЧНЫХ МАСС

Предложена математическая модель расписания потребления ресурсов, базирующаяся на описании его как динамической колебательной системы и использовании математического аппарата теоретической механики. Введенные в статье характеристики модели позволяют выполнить быструю оптимизацию сетевого графика с учетом ограниченности ресурса без выполнения перебора всех возможных вариантов.

Ключевые слова: календарный график, расписание, потребление ресурсов, кривая потребления ресурса, ассоциативные оценки, оптимизация расписания

Постановка проблемы

В настоящее время актуальной проблемой является отсутствие математической модели, позволяющей формировать оптимальные расписания потребления ресурсов без полного перебора всех возможных вариантов. Методы же, позволяющие избежать полного перебора, не гарантируют оптимальности полученного результата или отсутствия пропуска более подходящего решения.

Анализ последних исследований

Моделирование является основным инструментом анализа, оптимизации и синтеза систем. Понятие модели связано с определенным сходством между двумя объектами. Сходство может быть чисто внешним (например, макет подлежащего строительству здания) либо внутренним (например, санитарно-технические и электрические сети). Наибольшее значение для кибернетических систем имеет сходство по определенным чертам поведения объектов, позволяющее моделировать поведение систем [1].

Составление календарных планов и графиков – обязательное условие организации четкой и согласованной работы всех участников строительства. Основная задача календарного планирования заключается в составлении таких расписаний выполнения работ, которые удовлетворяют всем ограничениям, налагаемым технологическими моделями на порядок, сроки и интенсивность работ, а также на использование ресурсов.

Задачи составления расписаний на основе технологических моделей, учитывающих ресурсные характеристики отдельных работ и комплексов в целом, являются в то же время задачами распределения ресурсов, т.е. построения графиков интенсивности потребления ресурсов всеми работами, удовлетворяющих всем условиям технологической модели и оптимальных по принятому критерию. Эти задачи, относящиеся к оптимизационному типу, составляют класс NP - полных комбинаторных задач, отягощенных требованиями целочисленности накладываемыми на временные и ресурсные характеристики расписания. Вышеперечисленные особенности обусловили переход от точных математических методов решения задач построения расписаний к эвристическим методам с целью получения рационального расписания (вариантов расписания), по возможности близкого к оптимальному [2;3].

Глубинная причина такой ситуации, на наш взгляд, состоит в том, что в настоящее время отсутствует специальный оценочный аппарат, позволяющий достаточно точно определить, насколько полученные расписания по форме кривой потребления ресурсов близки к оптимальному(с желаемой формой кривой). Так, модель производственного процесса в виде расписания (календарного плана) детально и подробно описывает все существующие связи внутри процесса строительства. Все эти параметры, безусловно, необходимы для получения ресурсных характеристик расписания, но столь подробная модель как бы заслоняет собой сам объект не позволяя выделить главные его особенности.

Отдельно следует охарактеризовать существующие критерии качества использования ресурсов. Традиционно при построении расписаний используются критерии минимума отклонения потребности в ресурсах от функции заданного вида, минимума среднеквадратичного отклонения, минимума наибольшего ежедневного потребления ресурсов, критерий равномерности потребления ресурсов.

В силу ограниченности ресурсов и наличия множества работ, претендующих на них, всегда будет существовать несколько вариантов возможного распределения ресурса между работами. Задача выбора наилучшего расписания не столь тривиальна, как кажется с первого взгляда. Пусть хотя бы для двух расписаний получены одинаковые значения используемого критерия. С теоретической точки зрения следует отдать предпочтение тому варианту, у которого кривая потребления ресурса более точно повторяет желаемую. Но ни сетевая модель, ни полученный на ее основе календарный план, ни используемый критерий оценки качества не содержат информации о полученной форме кривой потребления ресурсов. То есть, мы не имеем возможности оценить был ли полученный экстремум обусловлен незначительными колебаниями реальной кривой потребления ресурсов от желаемой, или вызван кратковременным, но значительным их расхождением. Ввиду вышесказанного, предпочтение может быть отдано менее подходящему варианту. С нашей точки зрения данная проблема существует и в случае, когда для двух расписаний получены различные значения используемого критерия. Более того, даже в случае использования нескольких вышеперечисленных критериев мы сталкиваемся с тем, что расписания, имеющие одинаковые значения критериев, могут тождественно не совпадать и наоборот.

Таким образом, анализ экспериментальных данных показал, что перечисленные критерии хоть и позволяют достаточно полно оценить качество использования ресурсов, но совершенно не характеризуют форму кривой потребления ресурсов.

Формулирование цели

Для преодоления вышеуказанных трудностей необходимо построение модели расписания, которая бы позволила выделить внутренние закономерности объекта и получить новый оценочный аппарат, избавленный от недостатков ранее использовавшихся критериев.

Изложение основного материала

Для достижения цели предлагается построение модели расписания как динамической (колебательной) системы точечных масс. Модель будет иметь вид системы стержневых маятников. Длина стерженька равна времени выполнения работы (поперечным размером можно пренебречь), а сам он подвешен на невесомой нерастяжимой нити. Длина нити имитирует время, на которое работа отстоит от начала проекта (точки подвеса нити), а вес гирьки – интенсивность. Длина нити может варьироваться с учетом величины свободного резерва. Кривой потребления ресурса во времени будет соответствовать изменение линейной плотности (веса в единице длины) по мере удаления от точки подвеса. Для описания таких систем в теоретической механике существует хорошо развитый математический аппарат.

Рассмотрим выражение для момента инерции системы точечных масс :

$$J = \sum_i x_i \cdot m_i ,$$

где, x_i - координата i-той массы m_i .

Заменив в этом выражении координату временем (поскольку время выполнения работ и есть одна из координат), а массу – интенсивностью потребности в ресурсе, получим :

$$m_1 = \sum_{t=t_0}^{T} t \cdot P(t). \qquad (1)$$

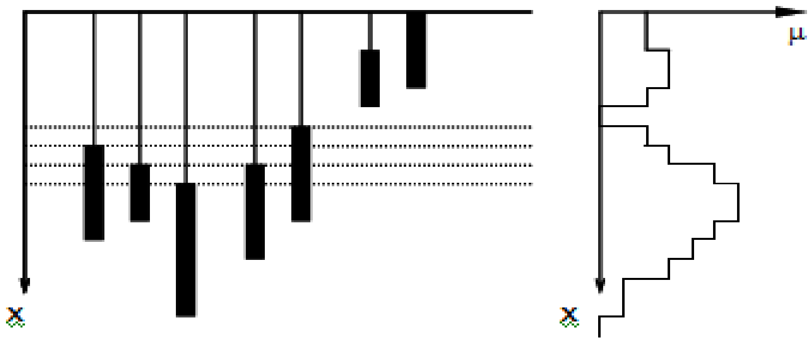

Рис.1. Система стержневых маятников и кривая изменения линейной плотности

Очевидно, что эта оценка отражает пространственно-временное расположение графика функции потребности в ресурсах. Так, значение оценки изменяется как при переносе графика функции вдоль оси времени($t = t + \Delta t \quad \Delta t = 1,2,3,...$), так и при изменении вида графика

($P'_{t_i} = P_{t_i} + \Delta P,\ P'_{t_j} = P_{t_j} - \Delta P$).

Следовательно, оценка может быть использована для характеристики пространственно-временного положения функции потребности в ресурсе, что и было необходимо. Однако данная оценка может иметь одно и тоже числовое значение для различных графиков. Этим сфера ее применения сильно ограничивается.

С помощью выражения (1) можно оценить каждую точку графика функции потребности в ресурсе, однако необходимо большее – требуется дать интегральную оценку всего графика и при этом, по возможности, учесть такие его качественные характеристики, как гладкость, симметричность, отсутствие выбросов и т.д.

Попытка получения второго центрального момента (прецессии) даст в результате

$$\mu_2 = \sum_{t=t_0}^{T} \left(t - m_1\right)^2 \cdot P_t \ ,$$

выражение, эквивалентное формуле для дисперсии некоторой случайной величины.

Практически из всех центральных моментов, для описания распределения случайной величины, применяют первый начальный (математическое ожидание) и второй центральный (дисперсия) моменты. Если знаний дисперсии и математического ожидания недостаточно, то для более полной характеристики случайной величины, точно также, как и при описании динамической системы в теоретической механике, пользуются моментами высших порядков.

Например, может оказаться, что математические ожидания и дисперсии двух случайных величин совпадают, а законы распределения тем не менее различны.

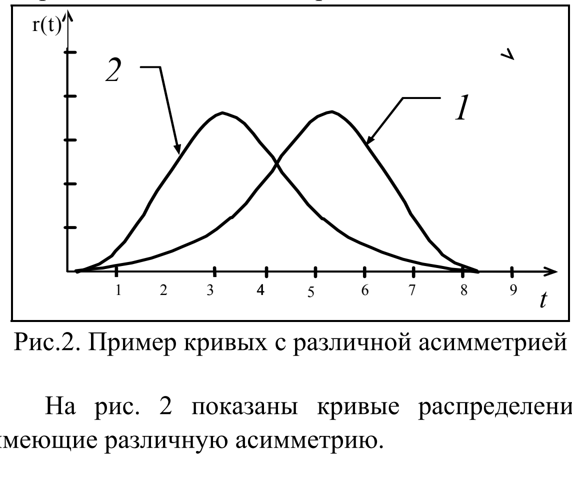

Рис.2. Пример кривых с различной асимметрией

На рис. 2 показаны кривые распределения, имеющие различную асимметрию.

Асимметрию характеризуют при помощи третьего центрального момента μ_3 .

$$\mu_3 = \sum_{t=t_0}^{T} \left(t - m_1\right)^3 \cdot P_t .$$

Для симметричных распределений нечетные центральные моменты равны нулю. Поэтому естественно принять в качестве характеристики асимметрии какой-либо из них. Самый простой – третий.

Кривые распределения могут быть более или менее “крутыми”(рис. 3).

Для характеристики островершинности или плосковершинности применяют четвертый центральный момент.

$$\mu_4 = \sum_{t=t_0}^{T} \left(t - m_1\right)^4 \cdot P_t \ .$$

С его помощью определяется эксцесс распределения.

Для практического применения существенным является вопрос о том, каким количеством центральных моментов можно обойтись при описании формы функции потребности в ресурсе. Другими словами - с какой точностью необходимо описывать реальную систему.

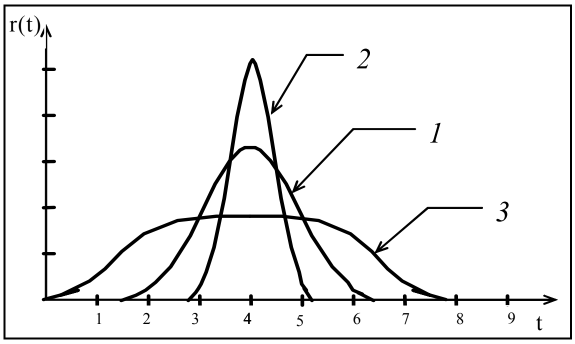

Рис.3. Пример кривых с различным эксцессом

Из теоретической механики известно, что система описывается с точностью до следующего момента (момента высшего порядка) - как второй момент описывает отклонение точки повеса от центра масс момента (значения случайной величины от матожидания) – так и последующие моменты уточняют девиацию (отклонение) предыдущих. В общем случае, для описания системы с абсолютной точностью необходимо бесконечное число оценок, но дискретность и детерминированность задачи позволяю обойтись сравнительно небольшим количеством оценок.

Рассмотрим значения наших оценок для двух известных распределений – нормального и равномерного (см. табл.)

Сравнение характеристик для равномерного и нормального распределений

Характеристики	Равномерное	нормальное
плотность распределения	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, a<x<b\\ 0, a>x, x>b\end{cases}$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\mu_2\cdot 2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\mu_2}}$
математическое ожидание	$m=\frac{a+b}{2}$	m
дисперсия	$\mu_2=\frac{(b-a)^2}{12}$	μ_2
асимметрия	0	0
эксцесс	-1,2	0

Для практического применения существенным является вопрос о том, каким количеством центральных моментов можно обойтись при описании формы функции потребности в ресурсе. Другими словами – с какой точностью необходимо описывать реальную систему.

Из теоретической механики известно, что система описывается с точностью до следующего момента (момента высшего порядка) – как второй момент описывает отклонение точки повеса от центра масс момента (значения случайной величины

Как видим, в формулу значения математического ожидания (первого момента) и дисперсии (второго центрального момента) входят явно, следовательно, возможно получение нормального распределения с такими же значениями первого и второго центрального момента как и у равномерного. Следовательно, отклонение возникает только в значении четвертого центрального момента.

Принимая во внимание, что равномерный график функции потребности в ресурсе является одним из тех, которые считаются (эмпирически) оптимальными то, для однозначного определения кривой функции потребления ресурса одного момента явно недостаточно. Поэтому для более точного описания формы кривой предлагается использовать не четыре, а шесть центральных моментов

$$\mu_5=\sum_{t=t_0}^{T}(t-m_1)^5\cdot P_t\ ,$$

$$\mu_6=\sum_{t=t_0}^{T}(t-m_1)^6\cdot P_t\ .$$

Таким образом, четвертый центральный момент характеризует отклонение формы кривой потребления ресурса от равномерного, пятый – отклонение отклонения, а шестой – девиацию пятого. Дальнейшее увеличение числа моментов является нецелесообразным ввиду роста размерности задачи, но, в принципе, введение в рассмотрение моментов высших порядков не имеет принципиальных трудностей (только вычислительные). Количество центральных моментов, необходимых для описания отклонения реальной кривой потребления ресурса от «оптимальной» кривой, отличной от равномерной, требует отдельного анализа.

Данная система из первого начального и пяти центральных моментов

$$m=\sum_{t=t_0}^{T}t\cdot P_t\ ;$$

$$\mu_2=\sum_{t=t_0}^{T}(t-m_1)^2\cdot P_t\ ;$$

$$\mu_3=\sum_{t=t_0}^{T}(t-m_1)^3\cdot P_t\ ; \qquad (2)$$

$$\mu_4=\sum_{t=t_0}^{T}(t-m_1)^4\cdot P_t\ ;$$

$$\mu_5=\sum_{t=t_0}^{T}(t-m_1)^5\cdot P_t\ ;$$

$$\mu_6=\sum_{t=t_0}^{T}(t-m_1)^6\cdot P_t\ ;$$

полностью характеризует расписание, но ей свойственны определенные недостатки.

Отсутствие у оценок свойства аддитивности приводит к тому, что оценки для комплекса работ не могут быть получены без полного пересчета всей сети заново. Непродуктивные расходы вычислительной мощности в этом случае очень велики, к тому же с ростом размерности задачи растут и требования к ресурсам вычислительной техники. Вся информация должна храниться в одной ЭВМ и ею же обрабатываться, распределенная обработка невозможна. Быстро растущая размерность задачи (как степенная функция) предъявляет повышенные требования к объемам памяти, быстродействию и точности вычисления, требуя чрезвычайно дорогостоящих вычислительных средств и каналов передачи данных.

Обратный переход от оценок комплекса операций к расписанию, удовлетворяющему определенному критерию, значительно более сложен. Используются для этого, как правило, различные методы построения допустимого (удовлетворяющего технологическим и прочим ограничениям) расписания с последующей его проверкой на оптимальность. Расписание с наилучшими оценками считается оптимальным. При этом оптимальное по одному критерию расписание необязательно будет хотя бы удовлетворительным по остальным.

Доказательство оптимальности (или не оптимальности) чаще всего невозможно из-за слишком большого объема необходимых вычислений (количество возможных расписаний чрезвычайно велико даже при небольшом количестве работ).

Именно невозможность осуществить прямой и обратный переход от параметров расписания к параметрам функции, а также от параметров отдельных работ к параметрам комплекса работ, и наоборот, что приводит, на наш взгляд к тому, что хорошо развитые методы оптимизации оказываются малопригодными и заменяются на статистические и эвристические методы поиска приемлемого расписания.

С целью преодоления данных недостатков дополним данную систему оценок **Ошибка! Источник ссылки не найден.** следующими выражениями :

$$m_2 = \sum_{t=t_0}^{T} t^2 \cdot P_t ;$$

$$m_3 = \sum_{t=t_0}^{T} t^3 \cdot P_t ;$$

$$m_4 = \sum_{t=t_0}^{T} t^4 \cdot P_t ;$$

$$m_5 = \sum_{t=t_0}^{T} t^5 \cdot P_t ;$$

$$m_6 = \sum_{t=t_0}^{T} t^6 \cdot P_t ,$$

где: T - время завершения проекта; t_o - время начала проекта; P_t - интенсивность потребления ресурса в момент t .

Данные оценки называются начальными моментами, далее – просто моментами. Они не характеризуют отклонение точки подвеса от центра масс (значения случайной величины от ее математического ожидания), но обладают рядом уникальных свойств.

Наиболее важными являются следующие : возможно одновременное, параллельное и независимое вычисление всех шести оценок. В отличие от предыдущей системы, которая требует двукратного расчета характеристик сети. На первом проходе необходимо вычислить первый момент, а во время второго прохода вычисляются остальные оценки.

Данные оценки обладают свойством аддитивности – характеристика комплекса работ есть сумма характеристик работ, входящих в комплекс, взятых с учетом некоторого коэффициента.

Аддитивность данных оценок также дает возможность обратного перехода от заданных (оптимальных) характеристик комплекса к характеристикам отдельных работ, что позволяет построить расписание с заданной (оптимальной) формой кривой потребления ресурса.

Связь между параметрами работы и характеристиками комплекса работ может быть выражена аналитическими выражениями. Это позволяет получать новые характеристики комплекса работ в случае сдвига, изменения длительности, интенсивности одной работы (либо группы работ) без пересчета всех характеристик сети заново.

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4$$

$$\mu_5 = m_5 - 5m_4m_1 + 10m_3m_1^2 - 10m_2m_1^3 + 4m_1^5$$

$$\mu_6 = m_6 - 6m_5m_1 + 15m_4m_1^2 - 20m_3m_1^3 + \\ + 15m_2m_1^4 - 5m_1^6$$

вычисление центральных моментов через начальные позволяет снять практически все недостатки системы,

где, T- время завершения проекта; i - номер работы; t_0 - время начала проекта; P_t - интенсивность потребления ресурса в момент t .

Моменты связаны с центральными моментами взаимно однозначными соотношениями, поэтому введение их не является искусственным.

Ассоциативной данная система названа ввиду того, что она несет полную информацию как о форме кривой потребления ресурса, так и об ограничениях, наложенных на реальное расписание. При этом, полученные моменты не являются характеристиками в полном смысле этого слова так как только их соотношения, например – асимметрия, являются информативными.

Первые шесть оценок называются начальными моментами и обладают рядом уникальных свойств. Наиболее важными являются следующие.

Данные оценки обладают свойством аддитивности: характеристика комплекса работ есть сумма характеристик работ, входящих в комплекс, взятых с учетом некоторого коэффициента.

$$
\begin{cases}
m_1 = \sum_{T_0}^{T} t_i \cdot P_i \\
m_2 = \sum_{T_0}^{T} t^2 \cdot P_t \\
m_3 = \sum_{T_0}^{T} t^3 \cdot P_t \\
m_4 = \sum_{T_0}^{T} t^4 \cdot P_t \\
m_5 = \sum_{T_0}^{T} t^5 \cdot P_t \\
m_6 = \sum_{T_0}^{T} t^6 \cdot P_t \\
\mu_2 = m_2 - m_1^2 \\
\mu_3 = m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3 \\
\mu_4 = m_4 - 4m_3 m_1 + 6m_2 m_1^2 - 3m_1^4 \\
\mu_5 = m_5 - 5m_4 m_1 + 10m_3 m_1^2 - 10m_2 m_1^3 + 4m_1^5 \\
\mu_6 = m_6 - 6m_5 m_1 + 15m_4 m_1^2 - 20m_3 m_1^3 + 15m_2 m_1^4 + 5m_1^6 \\
\{ t'_i \le t_i \le t_{\bullet i}
\end{cases}
$$

Данная способность позволяет также разбивать сложную систему на составляющие по иерархическому принципу и решать задачи оптимизации независимо для каждого из элементов.

Связь между параметрами работы и характеристиками комплекса работ может быть выражена аналитическими выражениями. Это позволяет получать новые характеристики комплекса работ в случае сдвига, изменения длительности, интенсивности одной работы либо группы работ, без пересчета всех характеристик сети заново.

Наличие аналитических зависимостей в перспективе позволяет создать более эффективные алгоритмы и открывает широкие возможности для оптимизации расписания потребления ресурсов с использованием вычислительной техники и компьютерных сетей значительно меньшей вычислительной мощности.

Выводы

Из изложенного можно сделать следующие выводы:

- Предложена модель расписания как колебательной системы точечных масс.
- На основании модели получены характеристики, названные ассоциативными оценками, позволяющие оценить параметры кривой потребления ресурса.
- Рассмотрены свойства полученных оценок.
- Свойство аддитивности позволяет в рамках предложенной модели оценить влияние изменения параметров одной работы на ассоциативные оценки всего сетевого графика, без пересчета расписания в целом.
- Предложенная система ассоциативных оценок в силу обеспечения возможностей по осуществлению прямого и обратного переходов от временных параметров модели к параметрам функции потребления ресурсов, а также от параметров отдельных работ к параметрам комплекса работ в целом, и наоборот, позволит разработать новые методы поиска оптимальных решений, обеспечивающих заданную форму кривой потребления ресурсов.
- Использование ассоциативных оценок в качестве базы для построения автоматизированной системы принятия плановых и проектных решений, позволит лицу, принимающему решения оценить влияние принимаемого решения, как на результаты промежуточных этапов строительства, так и на конечный результат в целом, и выбрать наиболее оптимальный вариант.

Список литературы

1.Советов Б.Я. Моделирование систем/ Б.Я. Советов С.А. Яковлев. – М.: Высшая школа, 2001.- 343 с.

2.Рыжиков Ю.И. Имитационное моделирование. Теория и технология/ Ю.И.Рыжиков. – М.: СПб:КОРОНА принт; Альтекс-А, 2004. – 384 с.

3.Самарский А.А. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры /А.А.Самарский, А.П. Михайлов -2-е изд., испр. – М.:Физматлит, 2001. – 316 с.

Статья поступила в редколлегию: 12.05.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.В. Цюцюра, Киевский национальний университет строительства и архитектуры, Киев.