УДК 519.6

Н.І. Полтораченко

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

ДЕКОМПОЗИЦІЯ ЗАДАЧІ ПАРАМЕТРИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ІНФОРМАЦІЇ

Розглянуто задачу параметричної оптимізації інженерної мережі при сепарабельній цільовій функції з дискретними та інтервальними змінними, які виражають невизначеність вихідних даних. Запропоновано декомпозицію математичної моделі задачі.

Ключові слова: інженерна мережа, параметрична оптимізація, математична модель, декомпозиція, інтервальні змінні

Постановка проблеми

Задача параметричної оптимізації інженерної мережі (ІМ) є складовою частиною загального процесу проектування нових та реконструкції старих ІМ, що є нагальною проблемою комунального господарства [1;2]. Розв'язання цієї задачі в умовах невизначеності вихідних даних більш точно відображає реальний процес проектування.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Проектування нових та реконструкція старих ІМ є багатокритеріальною і багатовимірною задачею, яка вимагає нових підходів до її розв'язання [3]. У роботі [3] також зроблено наголос на необхідності одночасного урахування як детерміністських вихідних даних, так і тих, що можуть змінюватися з плином часу. Застосування функціонально-динамічних схем для моделювання інженерної мережі розглянуто у статті [4]. Невизначеність інформації в задачах оптимізації частіше виражається через нечіткі числа [5].

Формулювання мети статті

Метою статті є розробка методу розв'язання задачі параметричної оптимізації в умовах невизначеності вихідної інформації, яка виражається через інтервальні числа і функції. Розглянуто варіант сепарабельного характеру цільової функції.

Виклад основного матеріалу

Задача параметричної оптимізації ІМ має вигляд:

$$\sum_{i=1}^{v} y_i(h_i, q_i, D_i) \to \min$$

при обмеженнях

$$B \cdot \vec{h} = 0,$$
$$A \cdot \vec{q} = 0,$$
$$q_{i_{\min}} \le q_i \le q_{i_{\max}}, i = 1, 2, ..., v,$$
$$h_{i_{\min}} \le h_i \le h_{i_{\max}}, i = 1, 2, ..., v,$$
$$D_{i_{\min}} \le D_i \le D_{i_{\max}}, i = 1, 2, ..., v,$$
$$D_i \in \left\{D_{i1}, ..., D_{iW_i}\right\}, i = 1, 2, ..., v,$$

де $\overline{h} = (h_1, ..., h_v)$ - вектор паралельних змінних мережі, $\vec{q} = (q_1, ..., q_v)$ - вектор послідовних змінних мережі, v – кількість дуг графа, що описує ІМ; A – матриця інцедентності дуг та вершин графа, B – цикломатична матриця, що встановлює відповідність дуг фундаментальним циклам графа; $D_i \in \left\{D_{i1}, ..., D_{iW_i}\right\}$ – діаметр i-ї комунікації; W_i – кількість допустимих значень дискретної змінної D_i; $y_i(h_i, q_i, D_i)$ - капітальні та експлуатаційні витрати, що приходяться на i-у комунікацію; функції y_i є опуклими.

Оптимізація параметрів ІМ відбувається при відомих послідовних змінних та довжинах комунікацій, що приводить до еквівалентності визначення діаметрів D_i та паралельних змінних h_i (i=1,2,…,v), тобто $h_i = f_i(D_i)$. Невизначеність вихідних даних будемо виражати через інтервальний характер функцій f_i (i=1,2,…,v). Тоді задача оптимізації буде містити як дискретні змінні D_i, так і інтервальні h_i (i=1,2,…,v). Перейдемо від дискретних змінних до інтервальних. Якщо f_i (i=1,2,…,v) – інтервальна функція, то кожному $D_{iw}(w = 1, 2, ..., W_i)$ відповідає інтервал $h_{iw} = \left[\underline{h}_{iw}, \overline{h}_{iw}\right]$. Так як $D_i \in \left[D_{i1}, D_{iW_i}\right]$,

то $h_i \in \left[h_i^*, h_i^{**}\right]$,

де

$$h_i^* = \max\left\{\min_w \underline{h}_{iw}, h_{i_{\min}}\right\}, h_i^{**} = \min\left\{\max_w \overline{h}_{iw}, h_{i_{\max}}\right\}.$$

© Н.І. Полтораченко

Таким чином отримали задачу оптимізації з інтервальними змінними h_i (i=1,2,…,v) та новою областю визначення для кожної $h_i = \left[\underline{h}_i, \overline{h}_i\right]$. Враховуючи інтервальний характер змінних та визначення суми для інтервальних чисел, перше обмеження задачі параметричної оптимізації буде мати вигляд

$$\sum_{i\in M_p^+}\left[\underline{h}_i,\overline{h}_i\right]-\sum_{i\in M_p^-}\left[\underline{h}_i,\overline{h}_i\right]=$$

$$=\left[\sum_{i\in M_p^+}\underline{h}_i,\sum_{i\in M_p^+}\overline{h}_i,\right]-\left[\sum_{i\in M_p^-}\underline{h}_i,\sum_{i\in M_p^-}\overline{h}_i,\right]=0,$$

$$p=1,2,...,P,$$

де P – кількість фундаментальних циклів, M_p^+ – множина індексів змінних h_i, які входять до обмеження p зі знаком «+»; M_p^- – множина індексів змінних h_i, які входять до обмеження p зі знаком «-». Якщо умови проектування дозволяють скористатися спеціальним визначенням різниці інтервальних чисел ($\left[\underline{A},\overline{A}\right]-\left[\underline{B},\overline{B}\right]=\left[\min(\underline{A}-\underline{B},\overline{A}-\overline{B}),\max(\underline{A}-\underline{B},\overline{A}-\overline{B})\right]$) та ввести похибку ξ_p для кожного p-го обмеження (p=1,2,…,P), то обмеження, що розглядаємо, перетворюються у нерівності

$$-\xi_p \le \sum_{i\in M_p^+}\overline{h}_i-\sum_{i\in M_p^-}\overline{h}_i \le \xi_p,$$

$$-\xi_p \le \sum_{i\in M_p^+}\underline{h}_i-\sum_{i\in M_p^-}\underline{h}_i \le \xi_p.$$

Для того, щоб знайти інтервал h_i (i=1,2,…,v), достатньо з’ясувати значення його крайніх точок $\underline{h}_i$ та $\overline{h}_i$. Виразивши експлуатаційні та капітальні витрати для i-ї комунікації через крайні значення інтервалу h_i, отримаємо наступний вигляд задачі, що розглядається:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{v}(y_i(\underline{h}_i)+y_i(\overline{h}_i))\to\min, \qquad (1)$$

$$-\xi_p \le \sum_{i\in M_p^+}\overline{h}_i-\sum_{i\in M_p^-}\overline{h}_i \le \xi_p, \qquad (2)$$

p=1,2,…,P,

$$-\xi_p \le \sum_{i\in M_p^+}\underline{h}_i-\sum_{i\in M_p^-}\underline{h}_i \le \xi_p, \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{v}(\overline{h}_i-\underline{h}_i)\ge Q, \qquad (4)$$

$$h_i^* \le \underline{h}_i \le \overline{h}_i \le h_i^{**}, i=1,2,...,v, \qquad (5)$$

де Q – стала величина, що є результатом експертних оцінок, і впливає на ширину інтервалів h_i (i=1,2,…,v), а чим ширший інтервал, тим більше варіантів для вибору діаметрів комунікацій. Коефіцієнт ½ у цільовій функції надалі не будемо враховувати.

Отримали задачу сепарабельного програмування з лінійними обмеженнями та неперервними змінними $\underline{h}_i$ і $\overline{h}_i$. Так як задача параметричної оптимізації ІМ має велику розмірність, то пропонується розв’язувати її шляхом декомпозиції. Але спочатку доведемо наступне твердження. Розглянемо задачу

$$\sum_{i=1}^{v}y_i(x_i)\to\min, \qquad (6)$$

$$-\xi_p \le \sum_{i\in M_p^+}x_i-\sum_{i\in M_p^-}x_i \le \xi_p,\ p=1,2,\ldots,P, \qquad (7)$$

$$h_i^* \le x_i \le h_i^{**},\ i=1,2,\ldots,v \qquad (8)$$

Твердження. Якщо $h_i^{'}=\left[\underline{h}_i^{'},\overline{h}_i^{''}\right]$ (i=1,2,…,v) – розв’язок задачі (1)-(5), а $x_i^{'}$ (i=1,2,…,v) - розв’язок задачі (6)-(8), то $x_i^{'}\in\left[\underline{h}_i^{'},\overline{h}_i^{''}\right]$ (i=1,2,…,v).

Доведення. Нехай для кожного h_i (i=1,2,…,v) визначена область, в якій виконуються обмеження (2) і (3), а саме інтервали $\left[\lambda_i,\eta_i\right]$(i=1,2,…,v). Так як y_i (i=1,2,…,v) – опуклі функції, то на $\left[\lambda_i,\eta_i\right]$ y_i або зростають, або спадають, або містять інтервали і зростання, і спадання. Тоді $x_i^{'}=\lambda_i$, якщо y_i зростає, $x_i^{'}=\eta_i$, якщо y_i спадає, $x_i^{'}$ відповідає $\min\limits_{h_i\in[\lambda_i,\eta_i]}(y_i(h_i))$, якщо y_i містять інтервали і зростання, і спадання.

Нехай на $\left[\lambda_i,\eta_i\right]$ знайдений розв’язок $h_i^{'}=\left[\underline{h}_i^{'},\overline{h}_i^{'}\right]$ (i=1,2,…,v) цільової функції (1), що задовольняє обмеженням (4) і (5). Розглянемо для кожного випадку ситуацію $x_i^{'}\in\left[\underline{h}_i^{'},\overline{h}_i^{''}\right]$:

1) функція y_i зростає ($x_i^{'}=\lambda_i$). Тоді $\left[x_i^{'},\overline{h}_i^{'}\right]$ покращує обмеження (5) і зменшує значення цільової функції (1). Як наслідок, $\left[\underline{h}_i^{'},\overline{h}_i^{'}\right]$ не може бути розв’язком задачі (1)-(5) і не містити $x_i^{'}$;

2) функція y_i спадає ($x_i^{'}=\eta_i$). Тоді $\left[\underline{h}_i^{'},x_i^{'}\right]$ покращує обмеження (5) і зменшує значення цільової функції (1). Як наслідок, $\left[\underline{h}_i^{'},\overline{h}_i^{'}\right]$ не може бути розв’язком задачі (1)-(5) і не містити $x_i^{'}$;

3) функція y_i містить інтервали зростання і спадання. Якщо $x_i^{'}\notin\left[\underline{h}_i^{'},\overline{h}_i^{''}\right]$, то $\underline{h}_i^{'}<x_i^{'},\overline{h}_i^{'}<x_i^{'}$ або $\underline{h}_i^{'}>x_i^{'},\overline{h}_i^{'}>x_i^{'}$. Тоді до кожного варіанта може бути застосований перший або другий випадки. Як наслідок, і у третьому випадку $\left[\underline{h}_i^{'},\overline{h}_i^{'}\right]$ не може бути розв’язком задачі (1)-(5) і не містити $x_i^{'}$.

4) методом від супротивного доведено, що розв'язок задачі (6)-(8) належить розв'язку задачі (1)-(5).

5) наслідок. Якщо функція $y_i(h_i)$ зростає, то $\underline{h}_i = \lambda_i$, якщо функція $y_i(h_i)$ спадає, то $\overline{h}_i = \eta_i$.

6) за необхідності значення λ_i і η_i (i=1,2,…,v) можуть бути знайдені з таких задач:

7) $\sum_{i=1}^{v} \lambda_i \to \min,$

8) $-\xi_p \le \sum_{i \in M_p^+} \lambda_i - \sum_{i \in M_p^-} \lambda_i \le \xi_p,$

p=1,2,…,P,

$$\sum_{i=1}^{v} \eta_i \to \max,$$

$$-\xi_p \le \sum_{i \in M_p^+} \eta_i - \sum_{i \in M_p^-} \eta_i \le \xi_p,$$

p=1,2,…,P.

Переходимо до розв'язання вихідної задачі. Знаючи розв'язки останніх двох задач, задачу (1)-(5) можна представити наступним чином

$$\sum_{i=1}^{v} (y_i(\underline{h}_i) + y_i(\overline{h}_i)) \to \min,$$

$$\underline{h}_i = \lambda_i, \quad i \in W^*,$$

$$\overline{h}_i = \eta_i, \quad i \in W^{**},$$

$$\lambda_i \le \underline{h}_i \le x_i', \text{ i=1,2,…,v}, \quad i \,\overline{\in}\, W^*,$$

$$x_i' \le \overline{h}_i \le \eta_i, \text{ i=1,2,…,v}, \quad i \,\overline{\in}\, W^{**},$$

$$\sum_{i=1}^{v} (\overline{h}_i - \underline{h}_i) \ge Q,$$

де W^* - множина індексів, що відповідають зростаючим функціям y_i, W^{**} - множина індексів, що відповідають спадним функціям y_i.

До побудованої моделі може бути застосована декомпозиція Корнаі-Ліптака [5], яка розбиває вихідну задачу на дві локальні параметричні задачі та координуючу.

Локальні задачі мають вигляд:

$$\varphi_1 = \sum_{i=1}^{v} y_i(\underline{h}_i) \to \min,$$

$$\underline{h}_i = \lambda_i, \quad i \in W^*,$$

$$\lambda_i \le \underline{h}_i \le x_i', \; i=1,2,\dots,v, \; i \,\overline{\in}\, W^*,$$

$$\sum_{i=1}^{v} \underline{h}_i = p',$$

$$\varphi_2 = \sum_{i=1}^{v} y_i(\overline{h}_i) \to \min,$$

$$\overline{h}_i = \eta_i, \quad i \in W^{**},$$

$$x_i' \le \overline{h}_i \le \eta_i \; i=1,2,\dots,v, \; i \,\overline{\in}\, W^{**},$$

$$\sum_{i=1}^{v} \overline{h}_i = p''.$$

Координуюча задача:

$$\varphi_1^*(p') + \varphi_2^*(p'') \to \min,$$

$$p'' - p' \ge Q,$$

$$\sum_{i=1}^{v} x_i' \le p'' \le \sum_{i=1}^{v} \eta_i,$$

$$\sum_{i=1}^{v} \lambda_i \le p' \le \sum_{i=1}^{v} x_i',$$

де $\varphi_1^*(p'), \varphi_2^*(p'')$ - відповідні розв'язки локальних задач відносно p' та p''.

Існують різні методи розв'язання задачі сепарабельного програмування на базі декомпозиції Корнаі-Ліптака, але загальним для цих методів є те, що той чи інший параметр (штрафні константи, множник Лагранжа) змінюються до того моменту, поки не буде отриманий оптимальний розв'язок або близький до оптимального із заданою точністю.

Враховуючи, що для параметрів p' та p'' можна вказати конкретні кроки дискретизації, то є сенс вар'ювати саме їх значення. Для цього виділимо $\underline{h}_{im}$ та $\overline{h}_{il}$ такі, що

$$\underline{h}_{im} \in [\lambda_i, x_i'], m = 1,2,...,M_i, \overline{h}_{il} \in [x_i', \eta_i], l = 1,2,...,L_i,$$

де M_i та L_i – кількості змінних $\underline{h}_{im}$ та $\overline{h}_{il}$, які залежать від кількості допустимих значень діаметрів комунікації і. Тоді локальні задачі приймуть вигляд

$$\varphi_1 = \sum_{i=1}^{v} \sum_{m=1}^{M_i} y_i(\underline{h}_{im}) z_{im}' \to \min,$$

$$\sum_{m=1}^{M_i} z_{im}' = 1, \; i=1,2,\dots,v, \; i \,\overline{\in}\, W^*, \qquad (9)$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \overline{\in} W^*}}^{v} \underline{h}_{im} z_{im}' + \sum_{i \in W^*} \underline{h}_i = p',$$

$$z_{im}' \in \{0,1\}, \; m = 1,2,...,M_i, \; i=1,2,\dots,v, \; i \,\overline{\in}\, W^*,$$

$$\varphi_2 = \sum_{i=1}^{v} \sum_{l=1}^{L_i} y_i(\overline{h}_{il}) z_{im}'' \to \min,$$

$$\sum_{l=1}^{L_i} z_{il}'' = 1, \; i=1,2,\dots,v, \; i \,\overline{\in}\, W^{**}, \qquad (10)$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \overline{\in} W^{**}}}^{v} \overline{h}_{il} z_{il}'' + \sum_{i \in W^{**}} \overline{h}_i = p'',$$

$$z_{il}'' \in \{0,1\}, \; l = 1,2,...,L_i, \; i=1,2,\dots,v, \; i \,\overline{\in}\, W^{**}.$$

Значення $\underline{h}_i$ і $\overline{h}_i$ обчислюються за формулами

$$\underline{h}_i = \sum_{m=1}^{M_i} \underline{h}_{im} z'_{im},$$

$$\overline{h}_i = \sum_{l=1}^{L_i} \overline{h}_{il} z''_{il}.$$

Висновки

Задачі φ_1 та φ_2 є задачами булевого програмування, для яких кількість змінних визначається за формулами $\sum_{\substack{i=1 \\ i \in W^*}}^{v} M_i = n_1$, $\sum_{\substack{i=1 \\ i \in W^{**}}}^{v} L_i = n_2$. Без обмежень (9) та (10) необхідно було б розглянути 2^{n_1} і 2^{n_2} варіантів рішень. Обмеження (9) та (10) значно зменшують кількість варіантів, що розглядаються, а саме

$$\prod_{\substack{i=1 \\ i \in W^*}}^{v} M_i \quad \text{та} \quad \prod_{\substack{i=1 \\ i \in W^{**}}}^{v} L_i$$

для кожної з локальних задач. Оскільки M_i та L_i (i=1,2,…,v*)* вимірюються в одиницях, то задачі можуть бути розв'язані з використанням аддитивного алгоритма при будь-якому значенні v.

Список літератури

1. Храменков С.В. Стратегия модернизации водопроводной сети / С.В. Храменков. – М.: Стройиздат, 2005.

2. Стратегія проведення моніторінгу й реформування систем муніципального водопостачання // Водопостачання та водовідведення: Н.Г. Насонкіна, В.В. Дорофієнко, В.М. Маслюк, С.Є. Антоненко, В.М Сахновська. Виробничо-практичний журнал. – К., 2009. - №2. – С.2-8.

3. Демченко В.В. Переваги онтологічного підходу до розподіленого моделювання інженерних та транспортних мереж // Містобудування та територіальне планування: В.В. Демченко Наук.-техн.збірник. – К., КНУБА, 2008. – Вип.29. – С.79-83.

4. Застосування функціонально- динамічних схем для моделювання інженерної мережі водопостачання міста // Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравліки: П.І. Анпілогов, В.М. Михайленко, А.П. Анпілогов, Ю.В. Кошарна. Наук.-техн.збірник. – К., КНУБА, 2007. – Вип.27 . – С.8-13.

5. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій/ Ю.П. Зайченко: Підручник. – К., 2000. – 688 с.

Стаття надійшла до редколегії:12.05.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.М. Міхайленко, Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ