

Лізунов Петро Петрович

Доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри будівельної механіки,

<https://orcid.org/0000-0003-2924-3025>

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

Недін Валентин Олегович

Кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри будівельної механіки,

<https://orcid.org/0000-0003-3138-2892>

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

ВПЛИВ ПОЗДОВЖНЬОЇ СТИСКАЛЬНОЇ СИЛИ НА КРИТИЧНІ ШВИДКОСТІ ОБЕРТАННЯ СТЕРЖНІВ

Анотація. Наведено результати чисельного дослідження впливу дії поздовжньої сили, що стискає, на динамічну поведінку пружних стержнів при обертанні з урахуванням гіроскопічних моментів, а саме на зміну величин критичних швидкостей при зміні величини поздовжньої сили. Експлуатація обладнання, робочі органи яких можна представити у вигляді просторового пружного стержня, що обертаються і знаходяться під дією поздовжніх сил, здійснюється в різних швидкісних режимах. Пружний стержень при обертанні може здійснювати власні та вимушені коливання. Частоти власних коливань стержня залежать від швидкості його обертання. Така поведінка обумовлюється прецесійним рухом. Через це коливальний рух стержня розглядається у просторі з урахуванням гіроскопічних та інших інерційних навантажень. Критичні швидкості обертання при прецесійному русі залежать від напрямку прецесії і при прямій та зворотній прецесії мають відповідно різні значення для певного тону коливань. Окрім цього, на значення критичних швидкостей впливає дія поздовжніх сил. В якості результату показані залежності значень критичних швидкостей обертання при прямій та зворотній прецесії від величини поздовжньої сили, що стискає, для стержнів різної довжини. Результати отримані за допомогою розробленого програмного забезпечення для дослідження динаміки пружних стержнів, що обертаються. Здійснено аналіз отриманих результатів та зроблено висновок про можливість експлуатації обладнання у певних діапазонах швидкостей. Відмічено, що збільшення величини сили, що стискає, призводить до зменшення значень критичних швидкостей як для прямої так і для зворотної прецесії. Збільшення числа напівхвиль призводить до збільшення розбіжності між значеннями критичних швидкостей прямої та зворотної прецесії. Окрім того, на значення критичних швидкостей обертання і їх чутливість до поздовжньої сили суттєво впливає довжина стержня.

Ключові слова: пружні стержні; інерційні навантаження; гіроскопічні моменти; поздовжні сили; критичні швидкості

Постановка проблеми

Задачі дослідження динаміки пружних стержнів, що обертаються та знаходяться під дією зовнішніх поздовжніх навантажень знаходять своє застосування в різних технічних галузях. При вивченні згинальних коливань таких стержнів елементи згину необхідно розглядати у поєднанні з обертанням, оскільки в процесі коливань кожний переріз стержня має прогини та кути повороту, що змінюються у часі за певним законом.

При розгляданні задачі у просторі, в багатьох випадках відбувається такий рух стержня під час коливання, при якому центри його перерізів рухаються за еліпсоподібною траєкторією, що являє

собою прецесію, яка в свою чергу характеризує його пружні коливання.

Експлуатація обладнання, робочі органи яких можна представити у вигляді пружного стержня, що обертаються і знаходяться під дією поздовжніх сил, здійснюється в різних швидкісних режимах.

Якщо стержень розглядати як пружний, він може здійснювати власні та вимушені коливання. Частоти власних коливань такого стержня, а також його критичні швидкості, безпосередньо залежать від величини поздовжньої сили.

Для вивчення динамічної поведінки, аналізу динамічної стійкості стержнів при дії на них періодичних зовнішніх навантажень, у зв'язку з тим, що при певних співвідношеннях між частотою дії періодичного навантаження, що змушує коливання,

і частотою власних коливань прямолінійна форма стає динамічно нестійкою [1] (виникають поперечні коливання, амплітуда яких швидко зростає до критичних значень), в першу чергу важливим є питання про визначення частот власних коливань при різних швидкостях обертання та критичних швидкостей при прецесійному русі.

Аналіз основних досліджень і публікацій

За останні часи задачі динаміки коливань стержнів, що обертаються та знаходяться під дією осьових навантажень досліджені в роботах різних авторів. Низка робіт присвячена стержням значної довжини, для яких дія поздовжнього розподіленого по довжині навантаження власної ваги вносить вагомий вплив на динаміку їх роботи. Розглянуті задачі із дією поздовжньої зосередженої сили, що стискає, як сталої величини, так і періодичного та ударного характеру.

В роботі [6] розглянуто задачу стійкості стиснутого пружного стержня, що обертається з постійною кутовою швидкістю навколо осі, що проходить через шарнірні опори. Сила, що стискає є сталою, а лінія її дії збігається з віссю обертання стержня. В рамках теорії стійкості динамічних систем з розподіленими параметрами досліджується стійкість розв'язку нелінійної задачі, що описує деформацію стержня під дією сили стиску та розподіленого відцентрового навантаження.

В статті [7] описується розроблений метод, що включає динамічну модель бурильної колони та підхід до чисельної реалізації для аналізу її вигину у вертикальних свердловинах. Динамічна модель побудована на основі рівнянь Лагранжа та методу скінченних різниць. Числова реалізація досягається за допомогою методу прямого інтегрування та формули демпфування Релея. Результати розрахунків показують, що існують критичні швидкості, які змінюються залежно від зміни ваги на долоті та довжини колони.

В роботі [9] сформульовано диференціальні рівняння, що описують обертання сегментованого стержня під дією осьової сили. Показано, що межі стійкості сильно залежать від кількості з'єднань сегментів, швидкості обертання та сили стиску. Для великої кількості з'єднань сегментів результат наближається до результату для безперервного пружного стержня через деяку часткову степеневу величину. Аналіз застосовний до сегментованих бурових штанг.

В роботі [10] розглянуті поперечні згинальні коливання мікросвердла, що піддається осьовому

навантаженню, що стискає. Систему рівнянь руху дискретизовано у вигляді залежних від часу звичайних диференціальних рівнянь методом скінченних елементів. Встановлено еквівалентні формули для визначення критичних навантажень та критичних швидкостей.

В наведених роботах задачі розглянуті не у просторі, без урахування можливості прецесійного руху, що не дає змоги в повному обсязі оцінити динамічну поведінку таких систем.

В роботі [3] проведено чисельне дослідження впливу дії періодичної поздовжньої сили на поперечні коливання довгих стержнів, що обертаються. Коливальний рух розглянуто у просторі з урахуванням дії гіроскопічних сил та геометричної нелінійності. Для досліджуваних об'єктів показано, що на різних швидкостях обертання і частотах дії ударного поздовжнього навантаження коливальний рух відбувається з неоднаковою поведінкою. Для досліджень було використано запропоновану в роботі [4] методику чисельного диференціювання форм вигину просторових стержнів значної довжини за допомогою поліноміальних сплайн-функцій, яка разом із використанням методу інтегрування за часом використовується для розв'язання задач динаміки коливального руху стержнів з урахуванням геометричної нелінійності, гіроскопічних та інших інерційних навантажень.

Також із використанням запропонованої в роботі [4] методики в дослідженні [5] наведено результати вивчення коливального руху стрижня, що моделює роботу бурильної колони при обертанні у просторі. Показано, що дія зосередженої на нижньому кінці вагового стрижня стискальної сили призводить до збільшення амплітуди його вигину в нижній частині, внаслідок чого починається спіральне закручування.

З огляду присутніх у науковій літературі результатів впливає висновок, що в дослідженнях приділяється увага визначенню критичних швидкостей та інших параметрів систем, але недостатньо приділено уваги явищу прецесії коливального руху при обертанні стержнів, обумовленому впливом гіроскопічних моментів в різних режимах експлуатації зі зміною швидкості обертання, при різних значеннях поздовжньої сили.

Мета статті

Метою статті є представлення результатів чисельного дослідження впливу дії поздовжньої сили, що стискає, на значення критичних швидкостей обертання просторових стержнів при прецесійному русі, якими моделюється робота робочих органів свердлових та бурових пристроїв.

Виклад основного матеріалу

Постановка задачі

Рух свердла моделюється стержнем довжиною l (рис. 1), що обертається з кутовою швидкістю ω навколо прямолінійної осі O_1X_1 нерухомої системи координат $O_1X_1Y_1Z_1$ під дією поздовжньої сили P , що стискає. Зі стержнем пов'язана рухома система координат $OXYZ$. Коливальний рух стержня в системі координат $OXYZ$ характеризується переміщеннями $y(x,t)$ та $z(x,t)$ точок, що належать до його осі, у напрямку координатних осей OY та OZ відповідно.

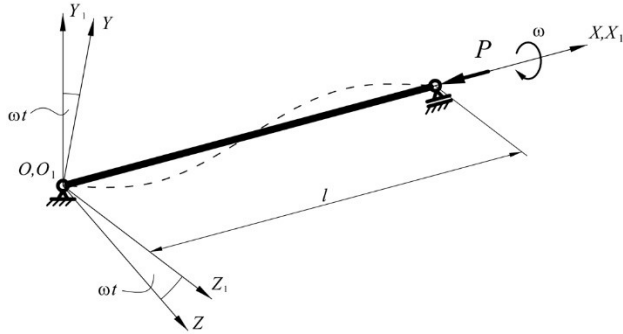


Рисунок 1 – Динамічна модель системи

Коливальний рух стержня у просторі при обертанні описується системою диференціальних рівнянь з частковими похідними з урахуванням гіроскопічних навантажень, які обумовлюються переносними, відносними та коріолісовими прискореннями у вигляді [2,8]:

$$\begin{cases} EI_{1(x)}y^{IV} - \bar{m}r^2(\ddot{y}'' + \omega^2 y'') - 2\omega\bar{m}\dot{z}' - \bar{m}\omega^2 y' + \bar{m}\ddot{y} + Py'' = 0 \\ EI_{2(x)}z^{IV} - \bar{m}r^2(\ddot{z}'' + \omega^2 z'') + 2\omega\bar{m}\dot{y}' - \bar{m}\omega^2 z' + \bar{m}\ddot{z} + Pz'' = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де E – модуль пружності матеріалу стержня; $I_{1(x)}, I_{2(x)}$ – моменти інерції перерізу стержня відносно осей OZ, OY ; r – радіус інерції перерізу стержня; $\bar{m}$ – маса одиниці довжини стержня. Штрихом в рівняннях позначено диференціювання по x , крапкою – по t .

Методика дослідження

Для n -ої форми вигину стержня розв'язок системи диференціальних рівнянь (1) в загальному випадку може бути знайдено у вигляді:

$$y(x,t) = F_y(x) \cdot A_n(t), \quad z(x,t) = F_z(x) \cdot B_n(t), \quad (2)$$

де $F_y(x), F_z(x)$ – функції n -ої форми вигину стержня в проекції на площини XOY, XOZ відповідно; $A_n(t), B_n(t)$ – функції відхилення за часом центра перерізу стержня у напрямках вздовж осей OY, OZ відповідно.

Загальний розв'язок рівнянь відносно форми вигину для вихідних граничних умов має вигляд:

$$F_y(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad F_z(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Для визначення критичних швидкостей обертання $\omega_{кр}$ для функцій $A_n(t), B_n(t)$ розв'язок можна шукати у вигляді: $A_n(t) = A_n \cos \lambda_0 t$, $B_n(t) = B_n \sin \lambda_0 t$,

де A_n, B_n – амплітуда відхилення центрів перерізів стержня в напрямках координатних осей OY і OZ відповідно; λ_0 – частота власних коливань стержня в рухомій системі координат $OXYZ$.

Розв'язавши вихідну систему рівнянь (1) для випадку $I_{1(x)} = I_{2(x)} = I$ відносно λ_0 , можна отримати характеристичне рівняння

$$\frac{EI}{\bar{m}} \cdot \frac{n^4 \pi^4}{l^4} - \frac{r^2 n^2 \pi^2}{l^2} \cdot (\lambda_0^2 - \omega^2) - (\lambda_0^2 + \omega^2) - 2\omega\lambda_0 - \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \cdot \frac{P}{\bar{m}} = 0. \quad (3)$$

У випадку прямої прецесії, коли $\lambda = \omega = \omega_{кр}$, $\lambda_0 = \lambda - \omega = 0$, з характеристичного рівняння (3), підставивши значення ω замість λ , маємо

$$\frac{EI}{\bar{m}} \cdot \frac{n^4 \pi^4}{l^4} + \frac{r^2 n^2 \pi^2}{l^2} \cdot \omega^2 - \omega^2 - \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \cdot \frac{P}{\bar{m}} = 0.$$

Розв'язавши це рівняння відносно ω , отримаємо

$$\omega_{кр} = \frac{n\pi}{l} \cdot \sqrt{\frac{\frac{EI}{\bar{m}} \cdot \frac{n^2 \pi^2}{l^2} - \frac{P}{\bar{m}}}{\left(1 - \frac{r^2 n^2 \pi^2}{l^2}\right)}}. \quad (4)$$

Формула (4) використовується для визначення критичних швидкостей обертання при прямій прецесії.

У випадку зворотної прецесії, коли $\lambda = -\omega$, $\lambda_0 = -2\omega$, з характеристичного рівняння (3), підставивши значення ω замість λ , маємо

$$\frac{EI}{\bar{m}} \cdot \frac{n^4 \pi^4}{l^4} - \frac{r^2 n^2 \pi^2}{l^2} \cdot 3\omega^2 - \omega^2 - \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \cdot \frac{P}{\bar{m}} = 0.$$

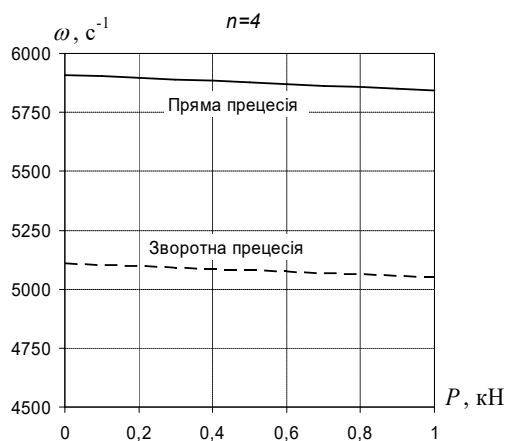
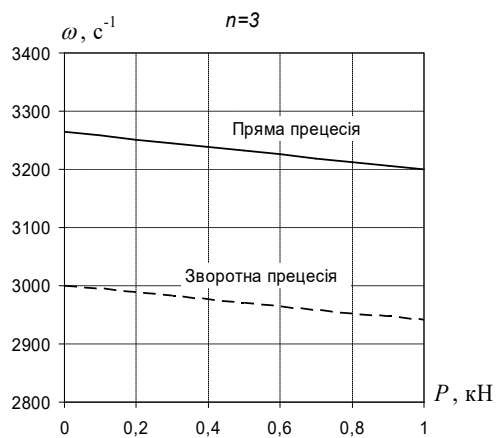
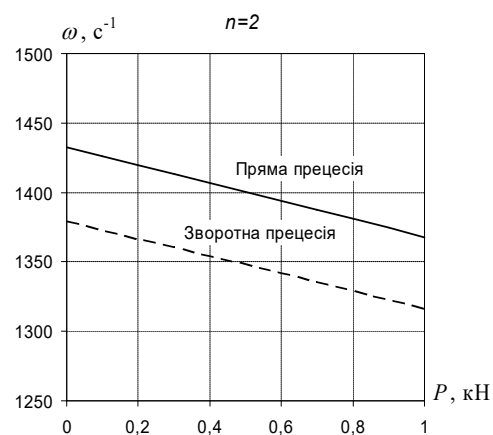
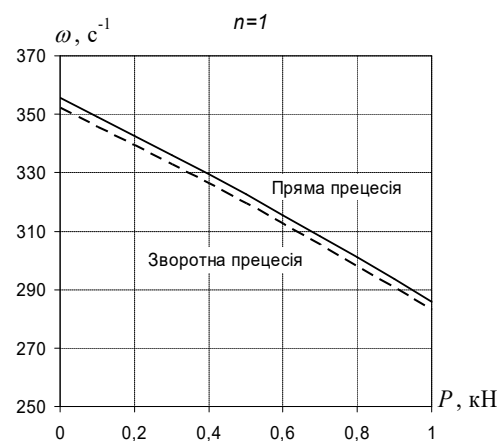
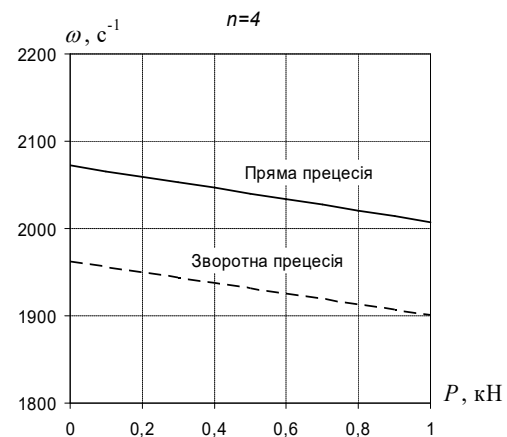
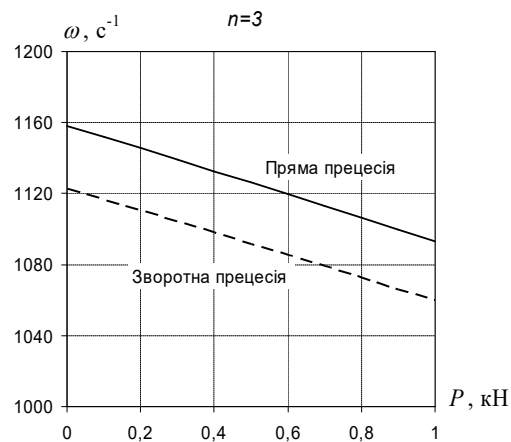
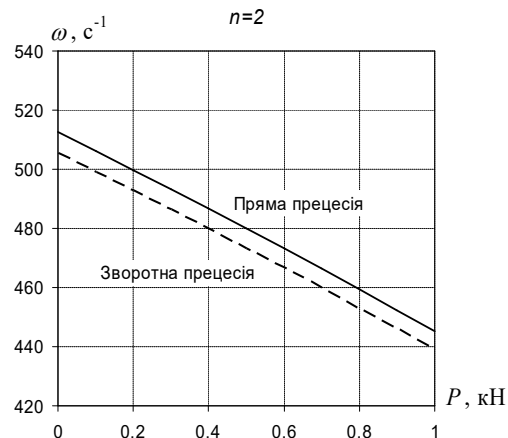
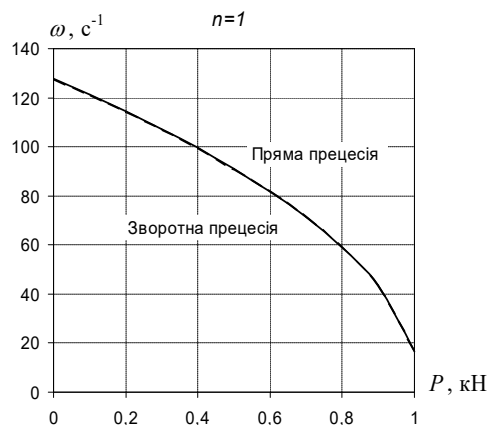
Розв'язавши це рівняння відносно ω , отримаємо

$$\omega_{кр} = \frac{n\pi}{l} \cdot \sqrt{\frac{\frac{EI}{\bar{m}} \cdot \frac{n^2 \pi^2}{l^2} - \frac{P}{\bar{m}}}{\left(1 + 3 \frac{r^2 n^2 \pi^2}{l^2}\right)}}. \quad (5)$$

Формула (5) використовується для визначення критичних швидкостей обертання при зворотній прецесії.

Результати

На рис. 2, 3 показані результати визначення залежності критичних швидкостей обертання $\omega_{кр}$ від поздовжньої сили P , що стискає для сталевго стержня із діаметром $d=0,01$ м, довжиною $l=0,6$ м (рис. 2) та 1 м (рис. 3).

Рисунок 2 – Залежності критичної швидкості від поздовжньої сили, що стискає, $l=0,6$ мРисунок 3 – Залежності критичної швидкості від поздовжньої сили, що стискає, $l=1$ м

Як можна побачити з отриманих результатів, зі збільшенням величини сили, що стискає, значення критичних швидкостей зменшуються. Зі збільшенням числа напівхвиль різниця між критичними швидкостями прямої та зворотної прецесії збільшується. Наприклад, якщо для першої гармоніки при довжині стержня 0,6 м, різниця між значеннями прямої та зворотної прецесії зовсім невелика, а при довжині 1 м, майже відсутня, то для 4-ї гармоніки ця різниця є суттєвою як для стержня довжиною 0,6 м, так і для стержня довжиною 1 м. Також зменшується різниця між значеннями критичних швидкостей прямої та зворотної прецесії при збільшенні довжини стержня.

Висновок

Динамічна поведінка стержнів, якими моделюється робота робочих органів свердлових та бурових пристроїв під час їх експлуатації привертає до себе увагу, оскільки в процесі роботи виникають режими, які супроводжуються значними вібраціями.

Частоти власних коливань таких стержнів при обертанні залежать від впливу гіроскопічних моментів, які призводять до прецесійного руху, що в свою чергу призводить до розбіжності значень критичних швидкостей обертання при прямій та зворотній прецесії.

Як показують наведені графіки збільшення величини сили, що стискає, призводить до зменшення значень критичних швидкостей як для прямої так і для зворотної прецесії. Збільшення числа напівхвиль призводить до збільшення розбіжності між значеннями критичних швидкостей прямої та зворотної прецесії. Окрім того, на значення критичних швидкостей обертання і їх чутливість до поздовжньої сили суттєво впливає довжина стержня. Значення критичних швидкостей є межами швидкісних діапазонів експлуатації обладнання, оскільки за межами цих діапазонів виникає динамічна нестійкість системи, тобто можливий коливальний рух стержня при обертанні почнеться із зростанням амплітуди коливань до критичної величини.

Список літератури

1. Баженов В. А., Погорелова О. С., Постнікова Т. Г. Хаос та сценарії переходу до хаосу у віброударній системі: монографія. Київ: Вид-во «Каравела», 2019. 146 с.
2. Лізунов П. П., Недін В. О. Коливання пружних елементів конструкцій, що обертаються, з урахуванням гіроскопічних навантажень: монографія. Київ: Каравела, 2022. 152 с.
3. Лізунов П. П., Недін В. О. Параметричні коливання пружних стрижнів, що обертаються, під дією періодичних поздовжніх сил. *Управління розвитком складних систем*. Київ, 2020. № 44. С. 56 – 64, dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2020.44.56-64.
4. Лізунов П. П., Недін В. О. Чисельне диференціювання форм вигину пружних стержнів значної довжини. *Управління розвитком складних систем*. Київ, 2021. № 46. С. 70 – 75, dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2021.46.70-75.
5. Недін В. О. Чисельне диференціювання складних форм вигину стрижнів значної довжини при обертанні. *Управління розвитком складних систем*. 2020. 43. С. 110–115, dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2020.43.110-115.
6. Bodnar T. A. The stability of a compressed rotating rod. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2000. 41. P. 745–751.
7. Peng Jia, Bo Zhou, Shifeng Xue, Yi Zhang, Xiuxing Zhu, Feng Sun. A dynamic method for post buckling analysis of drill string in vertical wells. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 2022. 214. 110334. URL: <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2022.110334>.
8. Tondl Aleš. Some Problems of Rotor Dynamics. Prague: Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, 1965. 434 p.
9. Wang C. Y. Buckling of a Rotating Rod Under Axial Force. *J. Appl. Mech.* 2004. 71 (4). P. 590–593.
10. Wei-Ren Chen. Parametric studies on buckling loads and critical speeds of microdrill bits. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2007. 49 (8). P. 935–949.

Стаття надійшла до редколегії 19.11.2025

Lizunov Petro

DSc, Professor, is the Head of the Department of Structural Mechanics,
<https://orcid.org/0000-0003-2924-3025>

Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

Nedin Valentyn

PhD, is with the Department of Structural Mechanics,
<https://orcid.org/0000-0003-3138-2892>

Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

INFLUENCE OF AXIAL COMPRESSIVE FORCE ON THE CRITICAL ROTATIONAL SPEEDS OF RODS

Abstract. The paper presents the results of a numerical study on the influence of an axial compressive force on the dynamic behavior of elastic rods during rotation, considering gyroscopic moments. Specifically, the research focuses on the changes in critical speed values relative to the magnitude of the axial force. Equipment components, which can be represented as spatial elastic rods rotating under axial forces, operate across various speed regimes. During rotation, an elastic rod can undergo free and forced vibrations. The natural frequencies of the rod depend on its rotational speed, a behavior governed by precessional motion. Therefore, the oscillatory motion of the rod is analyzed in space, taking into account gyroscopic and other inertial loads. The critical rotational speeds during precession depend on the direction of the precession, resulting in different values for forward and backward precession for a given vibration mode. Furthermore, the magnitude of the axial forces significantly affects these critical speeds. As a result, the dependencies of critical rotational speeds for both forward and backward precession on the magnitude of the axial compressive force are demonstrated for rods of various lengths. The results were obtained using proprietary software developed for investigating the dynamics of rotating elastic rods. An analysis of the findings was conducted, leading to conclusions regarding the feasible operating speed ranges for such equipment. It is noted that an increase in the compressive force leads to a decrease in critical speed values for both forward and backward precession. An increase in the number of half-waves results in a greater divergence between the critical speeds of forward and backward precession. Additionally, the length of the rod significantly influences the values of critical rotational speeds and their sensitivity to the axial force.

Keywords: elastic rods; inertial loads; gyroscopic moments; axial forces; critical speeds

References

1. Bazhenov, V. A., Pohorelova, O. S., & Postnikova, T. H. (2019). *Chaos and scenarios of transition to chaos in a vibro-impact system: Monograph*. Karavela.
2. Lizunov, P. P., & Nedin, V. O. (2022). *Vibrations of rotating elastic structural elements taking into account gyroscopic loads: Monograph*. Karavela.
3. Lizunov, Petro & Nedin, Valentyn. (2020). The parametric oscillations of rotating elastic rods under the action of the periodic axial forces. *Management of Development of Complex Systems*, 44, 56–64, dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2020.44.56-64.
4. Lizunov, Petro, Nedin, Valentyn. (2021). Numerical differentiation of bend forms of the long elastic rods. *Management of Development of Complex Systems*, 46, 70–75, dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2021.46.70-75.
5. Nedin, V. O. (2020). Numerical differentiation of complex bending modes of long rods during rotation. *Management of Development of Complex Systems*, 43, 110–115, dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2020.43.110-115.
6. Bodnar, T. A. (2000). The stability of a compressed rotating rod. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 41, 745–751.
7. Peng, J., Bo, Z., Shifeng, X., Yi, Z., Xiuxing, Z., & Feng, S. (2022). A dynamic method for post buckling analysis of drill string in vertical wells. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 214, Article 110334. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2022.110334>
8. Tondl, A. (1965). *Some problems of rotor dynamics*. Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences.
9. Wang, C. Y. (2004). Buckling of a rotating rod under axial force. *Journal of Applied Mechanics*, 71 (4), 590–593.
10. Chen, W.-R. (2007). Parametric studies on buckling loads and critical speeds of microdrill bits. *International Journal of Mechanical Sciences*, 49 (8), 935–949.

Посилання на публікацію

- APA Lizunov, P., & Nedin, V. (2025). Influence of axial compressive force on the critical rotational speeds of rods. *Management of Development of Complex Systems*, 64, 241–246, dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2025.64.241-246.
- ДСТУ Лізунов П. П., Недін В. О. Вплив поздовжньої стискальної сили на критичні швидкості обертання стержнів. *Управління розвитком складних систем*. Київ, 2025. № 64. С. 241 – 246, dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2025.64.241-246.